

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. X, N. 7

Serie nona

1° Luglio 1953

High-order Matter Tensors in Symmetrical Systems.

R. FIESCHI (*) and F. G. FUMI

Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano

(ricevuto il 4 Aprile 1953)

Summary. — The schemes of components of general fifth and sixth order tensors of polar and axial nature are derived for all the crystallographic groups by using the method of direct inspection for triclinic, monoclinic, rhombic, tetragonal and cubic groups, and elementary group theory for trigonal and hexagonal groups.

1. — Recent work in crystal physics has shown a definite trend toward the study of higher order effects which are particularly relevant in crystals capable of spontaneous electric (^{1a,b}) or magnetic (^{1c}) polarization, or subject to finite strain (²). Some authors describe these effects by fifth and sixth order tensors (^{1b,c-2}) and had to derive the schemes of special tensors of these orders

(*) Now at the Instituut voor Theoretische Natuurkunde, Utrecht, for the academic year 1952-53.

(^{1a}) A selected review of the extensive literature on physical properties of ferro-electrics has been given by H. BAUMGARTNER, F. JONA and W. KÄNZIG: *Ergebn. d. Exakt. Naturw.*, **23**, 235 (1950).

(^{1b}) W. P. MASON: *Bell System Tech. Journ.*, **26**, 80 (1947); *Phys. Rev.*, **88**, 480 (1952).

(^{1c}) W. P. MASON: *Phys. Rev.*, **82**, 715 (1951); **85**, 1065 (1952).

(²) F. BIRCH: *Phys. Rev.*, **71**, 809 (1947); F. G. FUMI: *Phys. Rev.*, **83**, 1274 (1951) and **86**, 561 (1952); R. F. S. HEARMON: *Acta Cryst.*, **6**, 331 (1953). A book on the subject has been published by Professor MURNAGHAN: F. D. MURNAGHAN: *Finite Deformation of an Elastic Solid* (New York, 1951).

in particular classes owing to the lack of general results. The interest and utility of such results collides with the length and algebraic complexity of their derivation by the standard methods of crystal physics⁽³⁾. The results that we present here for general polar and axial tensors of fifth and sixth order in all the crystallographic groups are obtained by the methods of direct inspection⁽⁴⁾ and of group theory⁽⁵⁾ which make their derivation relatively simple. They yield the schemes for the tensors already treated in the literature^(1b,c-2) when one specializes them to the appropriate intrinsic symmetries. Attention must be called, however, to the numerical factors which enter the defining law of a tensor as a consequence of the particularization and which affect its schemes of components⁽⁶⁾, even though the elimination of these factors is quite easy.

The methods we apply have been described elsewhere^(4,5): they have the common merit of reducing appreciably the work required by the standard methods and of allowing a fair amount of internal checking. The main drawback of the direct inspection method is the inapplicability to hexagonal groups and the applicability to trigonal groups only in peculiar frames different from those commonly adopted in the literature: here we have used direct inspection only for the groups of cartesian symmetry (triclinic, monoclinic, rhombic, tetragonal and cubic) where it is most useful. The application of group theory is most efficient when one has to deal with a high order tensor in a group and its subgroups and here we use group theory in such a situation by studying with it general fifth and sixth order tensors in all the trigonal and hexagonal subgroups of D_{6h} . The results for the various trigonal and hexagonal classes could also be derived from those for C_3 by direct inspection.

We adopt cartesian orthogonal frames and denote the tensor components in them by the coordinate products that are their indices. The total numbers

⁽³⁾ See e.g. W. VOIGT: *Lehrbuch der Krystallphysik* (Leipzig, 1928); A. E. H. LOVE: *The Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge, 1927); W. A. WOOSTER: *A Textbook on Crystal Physics* (Cambridge, 1938); W. P. MASON: *Piezoelectric Crystals* (New York, 1950).

⁽⁴⁾ F. G. FUMI: *Acta Cryst.*, **5**, 44, 691 (1952).

⁽⁵⁾ F. G. FUMI: *Nuovo Cimento*, **9**, 739 (1952).

⁽⁶⁾ These numerical factors are responsible, for instance, for the differences between the schemes for the third-order elastic coefficients of trigonal and hexagonal crystals given by HEARMON⁽²⁾ and by the writer⁽²⁾. The schemes of HEARMON were derived by dealing with the particular sixth-order polar tensor pqr ($p, q, r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) which describes the property of interest, while the schemes of the writer were obtained by specializing to the intrinsic symmetry of third-order elasticity the results for a general sixth-order polar tensor $ijklmn$ ($i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$) which are presented here.

The same applies to the differences in a few factors 2 between the schemes of photoelastic constants for symmetries C_3 , S_6 and C_{3h} , C_6 , C_{6h} reported by BHAGAVANTAM (*Proc. Ind. Acad. Sci.*, **A 16**, 359 (1942); *Acta Cryst.*, **5**, 591 (1951)) and by the writer (ref. 5, Table XII; *Nuovo Cimento*, **9**, 184 (1952)).

of components of general fifth order and sixth order tensors are 243 and 729. They are respectively x^5, y^5, z^5, x^4y (5), y^4x (5), x^4z (5), y^4z (5), z^4x (5), z^4y (5), x^3y^2 (10), y^3x^2 (10), x^3z^2 (10), y^3z^2 (10), z^3x^2 (10), z^3y^2 (10), x^3yz (20), y^3xz (20), z^3xy (20), x^2y^2z (30), x^2z^2y (30), y^2z^2x (30), and x^6, y^6, z^6, x^5y (6), y^5x (6), x^5z (6), y^5z (6), z^5x (6), z^5y (6), x^4y^2 (15), y^4x^2 (15), x^4z^2 (15), y^4z^2 (15), z^4x^2 (15), z^4y^2 (15), x^4yz (30), y^4xz (30), z^4xy (30), x^3y^3 (20), x^3z^3 (20), y^3z^3 (20), x^3y^2z (60), y^3x^2z (60), x^3z^2y (60), y^3z^2x (60), $x^2y^2z^2$ (90), where a notation of the type x^3yz (20) indicates the 20 components which are obtained by permuting in all ways x^3yz . The derivation of the schemes for the components of these tensors in all the crystallographic groups is carried out in sections 2 and 3.

2. — Groups of cartesian symmetry.

To treat the tensors of interest in the groups of cartesian symmetry we apply the method of direct inspection ⁽⁴⁾ which is based on the correspondence between the transformation properties of cartesian orthogonal tensor components and of coordinate products and on the use of cartesian orthogonal coordinates that do not transform into linear combinations of themselves under the symmetry operations of the group considered. The method takes also advantage of the equivalence of certain symmetry groups for certain tensor properties. To apply the method we shall adopt specific cartesian orthogonal frames, but attention should be called to the criteria of equivalence of reference frames enounced in ref. ⁽⁵⁾, page 741.

It is useful to begin the treatment of the 19 groups of cartesian symmetry with some general remarks that do not require the use of any algebra. Groups which do not contain improper rotations do not distinguish polar and axial tensors: in our case, this holds for C_2, D_2, C_4, D_4, T and O . Groups which differ by the center of symmetry are equivalent for polar tensors of even order and for axial tensors of odd order, if the reference frames adopted respect their relations: in our case, the families of equivalent groups are $C_{1h}, C_2, C_{2h}; C_{2v}, D_2, D_{2h}; S_4, C_4, C_{4h}; C_{4v}, D_{2d}, D_4, D_{4h}; T, T_h; T_d, O, O_h$. Finally, centrosymmetrical groups impose nullity to axial tensors of even order and polar tensors of odd order: the centrosymmetrical groups among the 19 groups we are considering are $S_2, C_{2h}, D_{2h}, C_{4h}, D_{4h}, T_h$ and O_h .

These general remarks reduce appreciably the work necessary to obtain the schemes of components for general fifth and sixth order tensors in the cartesian groups and may partly be used for internal checking. To be specific, to obtain the schemes we want we need only to treat the polar and axial fifth and sixth order tensors in the groups C_{1h}, C_{2v}, C_{4v} and T_d , the polar fifth and sixth order tensors in C_4 and T , and the polar fifth order and axial sixth order tensors in S_4 and D_{2d} . This is, of course, one of several possible paths

and is the one we adopt.

$$C_{1h} \quad \sigma_h \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow -z.$$

The non-zero independent components of a polar fifth or sixth order tensor are those even in z : i.e. respectively x^5 , y^5 , x^4y (5), y^4x (5), z^4x (5), z^4y (5), x^3y^2 (10), y^3x^2 (10), x^3z^2 (10), y^3z^2 (10), x^2z^2y (30), y^2z^2x (30) (in toto 122), and x^6 , y^6 , z^6 , x^5y (6), y^5x (6), x^4y^2 (15), y^4x^2 (15), x^4z^2 (15), y^4z^2 (15), z^4x^2 (15), z^4y^2 (15), z^4xy (30), x^3y^3 (20), x^3z^2y (60), y^3z^2x (60), $x^3y^2z^2$ (90) (in toto 365).

For an axial fifth or sixth order tensor the non-zero independent components are those odd in z : i.e. respectively z^5 , x^4z (5), y^4z (5), z^3x^2 (10), z^3y^2 (10), x^3yz (20), y^3xz (20), z^3xy (20), x^2y^2z (30) (in toto 121) and x^5z (6), y^5z (6), z^5x (6), z^5y (6), x^4yz (30), y^4xz (30), x^3z^3 (20), y^3z^3 (20), x^3y^2z (60), y^3x^2z (60), z^3x^2y (60), z^3y^2x (60) (in toto 364).

$$C_{2v} \quad \begin{array}{ll} \sigma_v & x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z, \\ \sigma_v' & x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z. \end{array}$$

The non-zero independent components of a polar fifth or sixth order tensor are those even in x and in y : i.e. respectively z^5 , x^4z (5), y^4z (5), z^3x^2 (10), z^3y^2 (10), x^2y^2z (30) (in toto 61), and x^6 , y^6 , z^6 , x^4y^2 (15), y^4x^2 (15), x^4z^2 (15), y^4z^2 (15), z^4x^2 (15), z^4y^2 (15), $x^2y^2z^2$ (90) (in toto 183).

For an axial fifth or sixth order tensor the non-zero independent components are those odd in x and in y : i.e. respectively x^3yz (20), y^3xz (20), z^3xy (20) (in toto 60), and x^5y (6), y^5x (6), z^4xy (30), x^3y^3 (20), x^3z^2y (60), y^3z^2x (60) (in toto 182).

$$C_4 \quad C_4 \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow -x, \quad z \rightarrow z.$$

The non-zero components of a fifth or sixth order tensor are those which have a total even number of x 's and y 's: i.e. respectively z^5 , x^4z (5), y^4z (5), z^3x^2 (10), z^3y^2 (10), x^3yz (20), y^3xz (20), z^3xy (20), x^2y^2z (30), and x^6 , y^6 , z^6 , x^5y (6), y^5x (6), x^4y^2 (15), y^4x^2 (15), x^4z^2 (15), y^4z^2 (15), z^4x^2 (15), z^4y^2 (15), z^4xy (30), x^3y^3 (20), x^3z^2y (60), y^3z^2x (60), $x^2y^2z^2$ (90).

For the fifth order tensor they are connected by the equations

$$\begin{array}{lll} z^5 = z^5 & y^4z = x^4z \text{ (5)} & z^3y^2 = z^3x^2 \text{ (10)} \\ y^3xz = -x^3yz \text{ (20)} & z^3yx = -z^3xy \text{ (10)} & y^2x^2z = x^2y^2z \text{ (15)} \end{array}$$

which leave 61 independent non-zero components. A notation of the type $y^4z = x^4z$ (5) indicates the five equations $y^4z = x^4z$, $y^3zy = x^3zx$, $y^2zy^2 = x^2zx^2$, $yzzy^3 = xzx^3$, $zy^4 = zx^4$, which are the distinct permutations of $y^4z = x^4z$.

For the sixth order tensor the connecting equations are

$$\begin{array}{ll}
 y^6 = x^6 & z^6 = z^6 \\
 y^5x = -x^5y \quad (6) & y^4x^2 = x^4y^2 \quad (15) \\
 y^4z^2 = x^4z^2 \quad (15) & z^4y^2 = z^4x^2 \quad (15) \\
 z^4yx = -z^4xy \quad (15) & y^3x^3 = -x^3y^3 \quad (10) \\
 y^3z^2x = -x^3z^2y \quad (60) & y^2x^2z^2 = x^2y^2z^2 \quad (45)
 \end{array}$$

and they leave 183 independent non-zero components.

$$S_4 \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow -x, \quad z \rightarrow -z.$$

The schemes of components for the polar fifth order and axial sixth order tensors in S_4 are immediately obtained by changing the signs in the equations which connect the components of the axial fifth order and polar sixth order tensors in S_4 : these equations were given under C_4 .

$$\begin{array}{ll}
 C_{4v} & C_4 \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow -x, \quad z \rightarrow z, \\
 & \sigma_v \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z.
 \end{array}$$

The non-zero components for a polar fifth or sixth order tensor and for an axial fifth or sixth order tensor can be obtained from those for C_4 respectively by eliminating and by choosing the ones which are odd in y : they are related by the same equations which hold in C_4 .

The polar fifth order tensor has 61 non-zero components

$$\begin{array}{ll}
 z^5 = z^5 & y^4z = x^4z \quad (5) \\
 z^3y^2 = z^3x^2 \quad (10) & y^2x^2z = x^2y^2z \quad (15)
 \end{array}$$

31 of which are independent.

The polar sixth order tensor has 183 non-zero components

$$\begin{array}{lll}
 y^6 = x^6 & z^6 = z^6 & y^4x^2 = x^4y^2 \quad (15) \\
 y^4z^2 = x^4z^2 \quad (15) & z^4y^2 = z^4x^2 \quad (15) & y^2x^2z^2 = x^2y^2z^2 \quad (45)
 \end{array}$$

92 of which are independent.

The axial fifth order tensor has 60 non-zero components

$$y^3xz = -x^3yz \quad (20) \quad z^3yx = -z^3xy \quad (10)$$

30 of which are independent.

The axial sixth order tensor has 182 non-zero components

$$\begin{aligned} y^5x &= -x^5y \quad (6) & z^4yx &= -z^4xy \quad (15) \\ y^3x^3 &= -x^3y^3 \quad (10) & y^3z^2x &= -x^3z^2y \quad (60) \end{aligned}$$

91 of which are independent.

$$\begin{aligned} D_{2d} \quad S_4 \quad x &\rightarrow y, \quad y \rightarrow -x, \quad z \rightarrow -z, \\ C'_2 \quad x &\rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow -z. \end{aligned}$$

To obtain the schemes of components for the polar fifth order and axial sixth order tensors in D_{2d} it is sufficient to change the signs in the equations connecting the components of the axial fifth order and polar sixth order tensors in D_{2d} : these equations were given under C_{4v} .

$$\begin{aligned} T \quad C_2 \quad x &\rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z, \\ C'_3 \quad x &\rightarrow y, \quad y \rightarrow z, \quad z \rightarrow x, \end{aligned}$$

The independent non-zero components of fifth and sixth order tensors can be easily obtained by imposing C'_3 on the results for symmetry C_2 .

For the fifth order tensor we obtain the equations

$$\begin{aligned} z^5 &= x^5 = 0 & x^4z &= y^4x = 0 \quad (5) \\ y^4z &= z^4x = 0 \quad (5) & z^3x^2 &= x^3y^2 = 0 \quad (10) \\ z^3y^2 &= x^3z^2 = 0 \quad (10) & x^3yz &= y^3zx = z^3xy \quad (20) \\ x^2y^2z &= y^2z^2x = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

which leave 20 independent non-zero components.

For the sixth order tensor the equations are

$$\begin{aligned} x^6 &= y^6 = z^6 & x^5y &= y^5z = 0 \quad (6) \\ y^5x &= z^5y = 0 \quad (6) & x^4y^2 &= y^4z^2 = z^4x^2 \quad (15) \\ y^4x^2 &= z^4y^2 = x^4z^2 \quad (15) & z^4xy &= x^4yz = 0 \quad (30) \\ x^3y^3 &= y^3z^3 = 0 \quad (20) & x^3z^2y &= y^3x^2z = 0 \quad (60) \\ y^3z^2x &= z^3x^2y = 0 \quad (60) & x^2y^2z^2 &= y^2z^2x^2 = z^2x^2y^2 \quad (30) \end{aligned}$$

and they leave 61 independent non-zero components.

$$\begin{array}{ll}
 T_d & C_2 \quad x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z, \\
 & C'_3 \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow z, \quad z \rightarrow x, \\
 & \sigma_d \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow z, \quad z \rightarrow y.
 \end{array}$$

It is convenient to obtain the independent non-zero components for fifth and sixth order tensors by imposing σ_d on the results for symmetry T .

The 60 non zero components of the polar and axial fifth order tensors are respectively related by the equations

$$x^3yz = x^3zy = y^3zx = z^3yx = z^3xy = y^3xz \quad (10)$$

and by the equations

$$x^3yz = -x^3zy = y^3zx = -z^3yx = z^3xy = -y^3xz \quad (10)$$

which leave in each case 10 independent non-zero components.

The 183 non-zero components of the polar sixth order tensor are related by the equations

$$x^6 = y^6 = z^6$$

$$x^4y^2 = x^4z^2 = y^4z^2 = z^4y^2 = z^4x^2 = y^4x^2 \quad (15)$$

$$x^2y^2z^2 = x^2z^2y^2 = y^2z^2x^2 = z^2y^2x^2 = z^2x^2y^2 = y^2x^2z^2 \quad (15)$$

leaving 31 independent non-zero components, while the 180 non-zero components of the axial sixth order tensor are related by the equations

$$x^4y^2 = -x^4z^2 = y^4z^2 = -z^4y^2 = z^4x^2 = -y^4x^2 \quad (15)$$

$$x^2y^2z^2 = -x^2z^2y^2 = y^2z^2x^2 = -z^2y^2x^2 = z^2x^2y^2 = -y^2x^2z^2 \quad (15)$$

leaving 30 independent non-zero components.

3. - Trigonal and hexagonal groups.

To treat the tensors of interest in the trigonal and hexagonal groups we apply group theory. The method consists in principle in constructing a family of independent totally-symmetrical linear combinations of tensor components

in each group, and in equating to zero a family of independent non-totally-symmetrical linear combinations of the components contained in them. Practically, however, one takes advantage of the correlations between irreducible representations of groups and subgroups, and in our case it is sufficient to study the tensors of interest in the hexagonal holoedry. Furthermore, in the actual calculations one replaces the cartesian orthogonal tensor components by the corresponding coordinate products considering the relation of their transformation properties, and one obtains the results for higher order tensors from those for lower order tensors. Naturally, the bases constructed and the results obtained are valid with reference to the coordinate frame that one chooses; this applies, for instance, to Tables IV to XII, ref. (5). Attention should be called, however, to the criteria of equivalence of reference frames enounced on page 741, ref. (5).

The theory of the method was discussed in ref. (5). Here we shall illustrate in some detail the actual application of the procedure to fifth and sixth order tensors in trigonal and hexagonal groups: there are two independent parts of the procedure. The first part can be carried out once and for all for a given family of groups in unspecified cartesian orthogonal frames. In our case, it consists in listing the representations of D_{6h} , which correspond to the representations of interest for polar and axial tensors of each of the other trigonal and hexagonal groups. The representation of interest is defined as the representation to which belong the coordinate products that are the indices of the non-vanishing cartesian orthogonal tensor components in the given group: for polar tensors this representation is the totally-symmetrical representation, while for axial tensors it is the one-dimensional representation anti-symmetric in improper rotations. The corresponding representations of D_{6h} are read out of Table I, ref. (5). This leads to unite the trigonal and hexagonal groups in equivalent families for the various types of tensors, when one considers that even order coordinate products are even under inversion and odd order products are odd. Polar tensors of odd order and axial tensors of even order vanish identically in D_{6h} , C_{6h} , S_6 and D_{3d} ; for these tensors, however, there are no other equivalences among trigonal and hexagonal groups. For polar tensors of even order and axial tensors of odd order the groups D_{6h} ($D_{6h} = D_6 \times i = C_{6v} \times i = D_{3h} \times i$), D_6 , C_{6v} and D_{3h} are equivalent when the reference frames adopted respect their relations: the same holds for C_{6h} , C_6 , C_{3h} , for S_6 , C_3 and for D_{3d} , D_3 , C_{3v} . The results of the first part of the procedure for trigonal and hexagonal groups are already contained in the tables of ref. (5).

The second part of the procedure needs to be carried out for each order of tensors in a specified cartesian orthogonal frame. In our case, it consists in building a set of independent one-dimensional coordinate representations of D_{6h} of the fifth and sixth order and a set of independent two-dimensional irreducible

representations with products appearing in the one-dimensional representations: the last step involves the solution of the equations obtained by equating to zero the two-dimensional bases. Obviously, it is sufficient to perform the calculations in D_6 , and there we shall adopt the cartesian orthogonal frame $x||C'_2$, $y||C'_2$, $z||C'_6$ as we did previously (see ref. (5), page 748).

The reduction by equation (1), ref. (5), of the representations of D_6 based on general fifth order coordinate products

$$\chi'(R_j(\varphi)) = (1 + 2 \cos \varphi)^5$$

and on general sixth order coordinate products

$$\chi'(R_j(\varphi)) = (1 + 2 \cos \varphi)^6$$

shows that we can construct respectively 25 A_{1u} , 26 A_{2u} , 15 B_{1u} , 15 B_{2u} bases of D_{6h} with fifth order coordinate products and 72 A_{1g} , 71 A_{2g} , 50 B_{1g} , 50 B_{2g} bases of D_{6h} with sixth order coordinate products. To denote these bases we shall use symbols of the type $B_{1u}(V)$ and $A_{2g}(VI)$.

The construction of these one-dimensional bases is not necessary to identify the coordinate products which belong to the corresponding representations in the adopted frame (Tables I, II), since this identification can be done directly (7), but it is necessary to carry out the successive step of the procedure.

(7) In the cartesian orthogonal reference frame that we have chosen, (x, y) belong to E_{1u} and z belongs to A_{2u} . Even powers of z will belong to A_{1g} , while odd powers of z will belong to A_{2g} : all products of the type xz^n , yz^n with any integer n will not belong to one-dimensional representations of D_{6h} . The direct products of an even number of representations E_{1u} involve only A_{1g} , A_{2g} and E_{2g} , while the direct products of an odd number of representations E_{1u} involve only B_{1u} , B_{2u} and E_{1u} : so the products $x^n y^m$ (n, m integers) with $n + m$ even will belong to A_{1g} and A_{2g} , while those with $n + m$ odd will belong to B_{1u} and B_{2u} . The A_{1u} , A_{2u} , B_{1g} and B_{2g} products will always contain z . It is now sufficient to recall that the second order products x^2 and y^2 are A_{1g} , while xy and yx are A_{2g} and that the third order products x^3 , $y^2 x$ (3) are B_{1u} while y^3 , $x^2 y$ (3) are B_{2u} . It follows in a straightforward fashion that coordinate products $x^n y^m z^p$ (n, m, p integers) with n, m and p all even are A_{1g} ; products with n, m, p all odd are A_{1u} ; products with n, m odd and p even are A_{2g} ; products with n, m even and p odd are A_{2u} ; products with n even and m, p odd are B_{1g} ($2r$ -order products yz^{2r-1} are excluded); products with n odd and m, p even are B_{1u} ($2r + 1$ -order products xz^{2r} are excluded); products with n, p odd and m even are B_{2g} ($2r$ -order products xz^{2r-1} are excluded); and finally products with n, p even and m odd are B_{2u} ($2r + 1$ -order products yz^{2r} are excluded).

In the adopted frame, A coordinate products can appear only in E_2 bases of D_{6h} while B coordinate products can appear only in E_1 bases ⁽⁸⁾. This fact and the explicit form of the one-dimensional bases are of importance in determining the number of independent E bases of D_{6h} which can be formed in the adopted frame with the various types of fifth and sixth order coordinate products entering the one-dimensional bases: the actual construction of these E bases can be done by multiplication of the lower order bases we built previously ⁽⁵⁾.

TABLE I. — *Fifth-order coordinate products* *.(Cartesian orthogonal frame $x//C'_2$, $y//C''_2$, $z//C_6$).

A_{1u}	$x^3yz(20)$ **, $y^3xz(20)$ $xyz^3(20)$	} 121 A products
A_{2u}	$x^4z(5)$, $y^4z(5)$, $x^2y^2z(30)$ $x^2z^3(10)$, $y^2z^3(10)$ z^5	
B_{1u}	x^5 , $y^4x(5)$, $x^3y^2(10)$ $x^3z^2(10)$, $xy^2z^2(30)$	} 112 B products
B_{2u}	y^5 , $x^4y(5)$, $y^3x^2(10)$ $y^3z^2(10)$, $yx^2z^2(30)$	

The ten products $xz^4(5)$ and $yz^4(5)$ do not belong to one-dimensional representations of D_{6h} .

* The total number of fifth-order coordinate products is 243.

** Notations of the type $x^3yz(20)$ denote the 20 possible permutations of the product x^3yz .

We shall illustrate all this in detail both for the fifth and the sixth order products of the cartesian orthogonal coordinates we have chosen.

FIFTH-ORDER PRODUCTS.

$E_{1u}(V)$ bases containing fifth order B_{1u} products. — We have 56 fifth order B_{1u} products and 15 $B_{1u}(V)$ bases: one can construct in toto 41 $E_{1u}(V)$

⁽⁸⁾ The proof of this statement (ref. ⁽⁵⁾, page 749) is very simple. It is sufficient to recall the theorem stated in footnote ⁽⁷⁾ for the direct products of E_{1u} representations of D_{6h} (to which belong the products x^ny^m) and to note that the direct products of A , B , E_1 and E_2 representations by A representations (to which belong the powers of z) yield respectively A , B , E_1 and E_2 representations.

bases ⁽⁹⁾ with fifth order B_{1u} products. 40 fifth order B_{1u} products contain z^2 , while 16 do not contain z . There are 10 B_{1u} (V) bases containing products with z^2 , and 5 containing products without z . So, one can form 30 E_{1u} (V) bases

TABLE II. — Sixth-order coordinate products *.
(Cartesian orthogonal frame $x//C'_2$, $y//C''_2$, $z//C_6$).

A_{1g}	$x^6, y^6, x^4y^2(15)^{**}, y^4x^2(15)$ $x^4z^2(15), y^4z^2(15), x^2y^2z^2(90)$ $x^2z^4(15), y^2z^4(15)$ z^6	} 365 A products
A_{2g}	$x^5y(6), y^5x(6), x^3y^3(20)$ $x^3yz^2(60), y^3xz^2(60)$ $xyz^4(30)$	
B_{1g}	$y^5z(6), x^4yz(30), y^3x^2z(60)$ $y^3z^3(20), yx^2z^3(60)$	} 352 B products
B_{2g}	$x^5z(6), y^4xz(30), x^3y^2z(60)$ $x^3z^3(20), xy^2z^3(60)$	

The twelve products $xz^5(6)$ and $yz^5(6)$ do not belong to one-dimensional representations of D_{6h} .

* The total number of sixth-order coordinate products is 729.

** Notations of the type $x^4y^2(15)$ denote the 15 possible permutations of the product x^4y^2 .

with fifth order B_{1u} products containing z^2 and 11 E_{1u} (V) bases with fifth order B_{1u} products without z .

$$\begin{aligned}
 E_{1u}(V) &= E_{1u}(\text{III}) \times A_{1g}(\text{II}) & (x^3 + y^2x) \times z^2 & \quad (30)^{(10)} \\
 & & (x^3 + y^2x) \times (x^2 + y^2) & \quad \text{--- } 10^{(11)} \\
 E_{1u}(V) &= E_{2g}(\text{II}) \times B_{1u}(\text{III}) & (x^2 - y^2) \times (x^3 - y^2x - xy^2 - yxy) &
 \end{aligned}$$

⁽⁹⁾ Actually one can construct 41 linear combinations of fifth order B_{1u} products belonging to E_{1u} . The number of linear combinations does not equal the number of bases since the latter are two-dimensional but we shall use the term base in a looser way for brevity.

⁽¹⁰⁾ A notation of this type indicates the 30 permutations of the given base.

⁽¹¹⁾ The 10 bases of the type $(x^3 + y^2x) \times (x^2 + y^2)$ which were adopted are:
 $x^5 + x^3y^2 + y^2x^3 + y^2xy^2$, $x^5 + x^2yxy + y^2x^3 + y^2xy$, $x^5 + x^2y^2x + xyx^2y + xy^4$,
 $x^5 + xyx^2y + yx^2yx + y^2xy^2$, $x^5 + xyxyx + yx^3y + y^2xy^2$, $x^5 + xy^2x^2 + x^3y^2 + xy^4$,
 $x^5 + yx^3y + x^2y^2x + yxy^3$, $x^5 + yx^2yx + x^2yxy + yxy^3$, $x^5 + yxyx^2 + x^3y^2 + yxy^3$,
 $x^5 + y^2x^3 + x^2y^2x + y^4x$.

The 10 bases of the type $(y^3 + x^2y) \times (x^2 + y^2)$ which were adopted can be obtained from the previous ones by changing x in y and viceversa.

$E_{1u}(V)$ bases containing fifth order B_{2u} products. — The discussion parallels exactly the one given for $E_{1u}(V)$ bases containing B_{1u} products.

$$E_{1u}(V) = E_{1u}(\text{III}) \times A_{1v}(\text{II}) \quad (y^3 + x^2y) \times z^2 \quad (30)$$

$$(y^3 + x^2y) \times (x^2 + y^2) \text{ — } 10 \quad (11)$$

$$E_{1u}(V) = E_{2v}(\text{II}) \times B_{1u}(\text{III}) \quad (xy + yx) \times (x^3 - y^2x - xy^2 - yxy)$$

$E_{2u}(V)$ bases containing fifth order A_{1u} products. — There are 60 fifth order A_{1u} products and 25 $A_{1u}(V)$ bases: one can construct in toto 35 $E_{2u}(V)$ bases with fifth order A_{1u} products. 20 fifth order A_{1u} products contain z^3 , while the remaining 40 contain one z : 10 $A_{1u}(V)$ bases contain products with z^3 and the remaining 15 contain products with one z . So, one can form 10 $E_{2u}(V)$ bases with fifth order A_{1u} products containing z^3 and 25 $E_{2u}(V)$ bases with fifth order A_{1u} products containing one z .

$$E_{2u}(V) = E_{2v}(\text{IV}) \times A_{2u}(\text{I}) \quad (xyz^2 + yxz^2) \times z \quad (10)$$

$$(x^3y - y^2xy - xy^3 - yxy^2) \times z \quad (xxxy : 5) \quad (12)$$

$$(x^3y + y^3x) \times z \quad (20)$$

$E_{2u}(V)$ bases containing fifth order A_{2u} products. — The discussion parallels the one given for $E_{2u}(V)$ bases containing A_{1u} products with a relevant difference. There are 61 fifth order A_{2u} products and 26 $A_{2u}(V)$ bases, one of the products being z^5 which in itself is an $A_{2u}(V)$ base and therefore does not appear in $E_{2u}(V)$ bases.

$$E_{2u}(V) = E_{2v}(\text{IV}) \times A_{2u}(\text{I}) \quad (x^2z^2 - y^2z^2) \times z \quad (10)$$

$$(x^4 - y^2x^2 - xy^2x - yxyx) \times z \quad (xxxx : 5)$$

$$(x^4 - y^4) \times z \quad (5)$$

$$(x^2y^2 - y^2x^2) \times z \quad (15)$$

SIXTH-ORDER PRODUCTS.

$E_{1v}(\text{VI})$ bases containing sixth order B_{1v} products. — There are 176 sixth order B_{1v} products and 50 $B_{1v}(\text{VI})$ bases: one can construct in toto 126 $E_{1v}(\text{VI})$ bases with sixth order B_{1v} products. 80 sixth order B_{1v} products contain z^3 , while 96 contain one z : 20 $B_{1v}(\text{VI})$ bases contain products with z^3 and the remaining 30 contain products with one z . So, one can form 60 $E_{1v}(\text{VI})$ bases with sixth

(¹²) This notation indicates the five permutations of the given base, subject to the condition that the order of the first four indices of each of its terms be unchanged: namely $x^3yz - y^2xyz - xy^3z - yxy^2z$, $x^3zy - y^2xzy - xy^2zy - yxyzy$, $x^2zxy - y^2zxy - xyz^2y - yxz^2y - yz^2xy - xzy^3 - yzxy^2, z^3xy - zy^2xy - zxy^3 - zyx^3y^2$.

order B_{19} products containing z^3 and 66 $E_{19}(\text{VI})$ bases with sixth order B_{19} products containing one z .

$$E_{19}(\text{VI}) = E_{19}(\text{V}) \times A_{29}(\text{I})$$

$$(y^3z^2 + x^2yz^2) \times z \quad (60)$$

$$(y^5 + y^3x^2 + x^2y^3 + x^2yx^2) \times z \text{ --- } 60 \quad (13)$$

$$(yx^4 + xyx^3 - xy^3x - xyxy^2 - xy^2xy - yxy^2x - yx^2y^2 - yxyxy) \times z (yxxxx : 6)$$

$E_{19}(\text{VI})$ bases containing sixth order B_{29} products. — The discussion parallels exactly the one given for $E_{19}(\text{VI})$ bases containing B_{19} products.

$$E_{19}(\text{VI}) = E_{19}(\text{V}) \times A_{29}(\text{I})$$

$$(x^3z^2 + y^2xz^2) \times z \quad (60)$$

$$(x^5 + x^3y^2 + y^2x^3 + y^2xy^2) \times z \text{ --- } 60 \quad (13)$$

$$(x^5 - x^2y^2x - x^3y^2 - x^2xyx - y^2x^3 + y^4x + y^2xy^2 + y^2xy) \times z (xxxxx : 6)$$

$E_{29}(\text{VI})$ bases containing sixth order A_{19} products. — There are 183 sixth order A_{19} products and 72 $A_{19}(\text{VI})$ bases: one can construct in toto 111 $E_{29}(\text{VI})$ bases with sixth order A_{19} products. One sixth order A_{19} product is z^6 , 30 sixth order A_{19} products contain z^4 , while 120 contain z^2 and the remaining 32 do not contain z . A set of $A_{19}(\text{VI})$ bases is formed by z^6 , 15 bases containing products with z^4 , 45 containing products with z^2 and 11 containing products without z . So, one can form 15 $E_{29}(\text{VI})$ bases with sixth order A_{11} products containing z^4 , 75 $E_{29}(\text{VI})$ bases with sixth order A_{19} products containing z^2 and 21 $E_{29}(\text{VI})$ bases with sixth order A_{19} products without z .

$$E_{29}(\text{VI}) = E_{29}(\text{IV}) \times A_{19}(\text{II})$$

$$(x^2z^2 - y^2z^2) \times z^2 \quad (15)$$

$$(x^4 - y^4) \times z^2 \quad (15)$$

$$(x^2y^2 - y^2x^2) \times z^2 \quad (45)$$

$$(x^4 - y^2x^2 - xy^2x - yxyx) \times z^2 \quad (xxxx : 15)$$

$$(x^4 - y^4) \times (x^2 + y^2) \quad (15)$$

$$(x^4 - y^2x^2 - xy^2x - yxyx) \times (x^2 + y^2) \text{ --- } 6 \quad (14)$$

(13) The 60 bases of the type $y^5z + y^3x^2z + x^2y^3z + x^2yx^2z$ can be obtained from the 10 bases of the type $y^5 + y^3x^2 + x^2y^3 + x^2yx^2$ (footnote (11)) by moving z through the other indices without changing their order. The same holds for the relation of the 60 bases of the type $x^6z + x^3y^2z + y^2x^3z + y^2xy^2z$ with the 10 bases of the type $x^5 + x^3y^2 + y^2x^3 + y^2xy^2$ (footnote (11)).

(14) The 6 bases of this type which were adopted are: $x^6 + x^4y^2 - y^2x^4 - y^2x^2y^2 - xy^2x^3 - xy^2xy^2 - yxyx^3 - yxyxy^2$, $x^6 + xyx^2yx - yx^2yx^2 - y^2xy^2x - x^2y^2x^2 - xy^4x - yxyx^3 - y^3xyx$, $x^6 + xy^2x^3 - yx^2yx^2 - y^4x^2 - x^3y^2x - xy^4x - yx^3yx - y^3xyx$, $x^6 + yx^2yx^2 - xy^2yx^2 - y^4x^2 - x^2y^2x - yxy^3x - xy^2yx - y^3xyx$, $x^6 + y^2x^4 - x^2y^2x^2 - y^4x^2 - x^3y^2x - y^2xy^2x - x^2yxyx - y^3xyx$.

$E_{20}(\text{VI})$ bases containing sixth order A_{20} products. — The discussion parallels the one given for $E_{20}(\text{VI})$ bases containing A_{10} products with the relevant difference that the product z^6 does not enter.

$$E_{20}(\text{VI}) = E_{20}(\text{IV}) \times A_{10}(\text{II}) \quad (xyz^2 + yxz^2) \times z^2 \quad (15)$$

$$(x^3y + y^3x) \times z^2 \quad (60)$$

$$(x^3y - y^2xy - xy^3 - yxy^2) \times z^2 \quad (xxxy : 15)$$

$$(x^3y + y^3x) \times (x^2 + y^2) \quad 15 \quad (15)$$

$$(x^3y - y^2xy - xy^3 - yxy^2) \times (x^2 + y^2) \quad 6 \quad (16)$$

The E bases that we have constructed are equated to zero and the resulting linear equations are solved for the coordinate products.

To conclude the application of the procedure, one has to combine its two parts. For a tensor of given order and nature, this combination consists in attributing to each of the trigonal and hexagonal groups which need to be distinguished for the tensor, the solutions of the equations containing products which belong to the representations of D_{6h} corresponding to the representation of interest for the tensor in the group. These solutions express the non-zero dependent components of the tensor in the group in terms of a family of independent non-zero components: the cartesian orthogonal coordinate products denote now the components of polar and axial tensors of which they are the indices. The results obtained are given in Tables III and IV.

Acknowledgments.

After our work had been completed, Dr. H. WONDRAUSCHEK of the University of Bonn kindly communicated to us (November 1952) his unpublished

(15) The 15 bases of this type which were adopted include: $x^3yx^2 + y^3xy^2 + y^3x^3 + x^3y^3$, $xyyx + y^4xy + y^3x^3 + x^3y^3$, $x^5y + y^5x + y^3x^3 + x^3y^3$, $x^2yx^3 + y^2xy^3 + x^3y^3 + y^3x^3$, $xyx^4 + yxy^4 + x^3y^3 + y^3x^3$, $yx^5 + xy^5 + x^3y^3 + y^3x^3$, $yx^5 + xy^5 + x^2y^2xy + y^2x^2yx$, $yx^5 + xy^5 + x^2y^3x + y^2x^2y$, $yx^5 + xy^5 + x^2yxy^2 + y^2xyx^2$, $yx^5 + xy^5 + x^2yx^2y^2 + y^2xy^2x^2$, $yx^5 + xy^5 + xy^3x^2 + yx^3y^2$, $yx^5 + xy^5 + xyxyxy + yxyxyx$, $yx^5 + xy^5 + xyxy^2x + yxyx^2y$, $yx^5 + xy^5 + xy^2x^2y + yx^2y^2x$, $yx^5 + xy^5 + xy^2xyx + yx^2xyx$.

(16) For reasons of convenience, the 6 bases which were actually adopted are: $y^5x + y^4xy + y^3xy^2 + y^2xy^3 + x^5y^3 + x^2y^2xy + x^2yxy^2 + x^2y^3x$, $y^5x + y^4xy + y^3xy^2 + y^2xy^3 + x^3y^3 + xyxyxy + xyx^2y^2 + xyxyx^2$, $y^5x + y^4xy + y^2xy^3 + yxy^4 + x^2yxy^2 + x^2y^2xy + xyx^2y^2 + xy^2xyx$, $y^5x + y^3xy^2 + y^2xy^3 + yxy^4 + x^2y^2xy + xyx^2y^2 + xyxyxy + x^3y^3x^2$, $y^4xy + y^3xy^2 + y^5x + xy^5 + x^3y^3 + yx^3y^2 + yx^2y^2x + yx^2xyx$, $y^4xy + y^3xy^2 + y^2xy^3 + yxy^4 + x^2y^3x + xyx^2yx + xyxy^2x + xy^3x^2$. They are differences of bases of the type $(x^3y - y^2xy - xy^3 - yxy^2) \times (x^2 + y^2)$ and bases of the type $(x^3y + y^3x) \times (x^2 + y^2)$.

Part a **

D_{6h}	D_6	C_{8v}	D_{3h}	C_{6h}	C_6	C_{3h}	D_{3d}	D_3	C_{3v}	S_6	C_3
$C_6 \parallel z$	$C_6 \parallel z$	$C_6 \parallel z$	$C_3 \parallel z$ $C_2' \parallel x$	$C_6 \parallel z$	$C_6 \parallel z$	$C_3 \parallel z$	$C_3 \parallel z$ $C_2' \parallel x$	$C_3 \parallel z$	$C_3 \parallel z$	$C_3 \parallel z$ $\sigma_v = yz$	$C_3 \parallel z$

polar	none	3	4	1	none	3, 4	1, 2	none	1, 3	2, 4	none	1, 2, 3, 4
axial	3	3	3	3	3, 4	3, 4	3, 4	1, 3	1, 3	1, 3	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4

Part b ‡

1) B_{1u} components (15 independent)

$$\begin{aligned} xxxxx &= -1/3 (yyyyx + yyyxy + yyxyy + yxyyy + xyyyy) \\ xxxyy &= -1/3 (2yyyyx + 2yyxyx - yyxyy - yxyyy - xyyyy) \quad (10) * \\ xyyzz &= -xxzzz \quad (30) \end{aligned}$$

2) B_{2u} components (15 independent)

$$\begin{aligned} yyyyy &= -1/3 (xxxyy + xxxyx + xxyxx + xyxxx + yxxxx) \\ yyyxx &= 1/3 (2xxxyy + 2xxxyx - xxyxx - xyxxx - yxxxx) \quad (10) \\ yxrzz &= -yyzzz \quad (30) \end{aligned}$$

3) A_{1u} components (25 independent)

$$\begin{aligned} xxyz &= -xyxz - yxxz - yxxx \quad (xxy:5) ** \\ yxyz &= -xyxz \quad (yyx:5) \\ xyxz &= -xyxz \quad (yxy:5) \\ xyyz &= -yxxx \quad (xyy:5) \\ yyyz &= xxyz + yxxz + yxxx \quad (yyy:5) \\ yxzz &= -xyzz \quad (10) \end{aligned}$$

4) A_{2u} components (26 independent)

$$\begin{aligned} xxxz &= xxyz + xyxz + yyyz \quad (xxx:5) \\ yyyz &= xxyz + xyxz + yyyz \quad (yyy:5) \\ yxxz &= xxyz \quad (15) \\ yyzx &= xxxz \quad (10) \\ zzzz &= zzzz \end{aligned}$$

NOTES TO TABLES III AND IV.

* The first part of the table identifies for each symmetry group the families of components which are non-zero in it. The second part of the table lists the components of these families.

** Reference frames which are not distinguishable in their relations to the existing symmetry elements are equivalent. For Table III this applies also to reference frames which differ by rotations of any angle around the axis C_6 .

‡ The equations are written keeping in the right hand side the components which can be chosen as independent. When ambiguity exists, and this occurs only in some equations with two terms, the choice of independent components is quite easy and left to the reader.

* Notations of the type (10) indicate that all the 10 permutations of the equation given in the table are valid equations.

** Notations of the type $(xxy:5)$ indicate that the 5 permutations of the equation given in the table, subject to the condition that the order of the first four indices of each of its terms be unchanged, are valid equations.

† The 9 components $yyyyx$ include $yyyyx$, $yyxyx$, $yyxyx$, $yyxyx$, $yyxyx$, $yyxyx$, $xyyyx$, $xyyyx$, $xyyyx$. The corresponding equations can be obtained from the equation given in Table IV by the same permutations.

†† The five components $yyxxx$ include $yyxxx$, $yyxxx$, $yyxxx$, $yyxxx$, $yyxxx$. The corresponding equations can be obtained from the equation given in Table IV by the same permutations.

TABLE IV. - Sixth-order general tensor - Trigonal and hexagonal groups *

Part a **

	D_{6h}	D_6	C_{6h}	C_{6h}	C_{6h}	C_{6h}	D_{3h}	D_{3d}	D_3	S_6	C_3
	$C_6 \parallel z$	$C_6 \parallel z$	$C_6 \parallel z$	$C_6 \parallel z$	$C_6 \parallel z$	$C_6 \parallel z$	$C_3 \parallel z$	$C_3 \parallel z$	$C_3 \parallel z$	$S_6 \parallel z$	$C_3 \parallel z$
	$C_2 \parallel x$	$C_2 \parallel x$				$C_2 \parallel x$	$C_2 \parallel x$	$C_2 \parallel x$	$C_2 \parallel x$		
polar	3	3	3, 4	3, 4	3, 4	3, 4	1, 3	1, 3	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4
axial	none	3	4	none	3, 4	3, 4	1	none	1, 3	none	1, 2, 3, 4
									$\sigma_v \equiv yz$		

Part b †

1) B_{1g} components (50 independent)

$$\begin{aligned}
 yyyyz &= -1/3 (xyyz + xxyx + xxyx + xxyx + yxxzx) & (6) \quad * \\
 yyyxz &= 1/3 (2xyyz + 2xyxz - xyxz - xyxz - yxxzx) & (60) \\
 yxxzz &= -yyyzz & (60)
 \end{aligned}$$

2) E_{2g} components (50 independent)

$$\begin{aligned}
 xxxxz &= -1/3 (yyyz + yyyz + yyyz + yyyz + xyyyz) & (6) \\
 xxyyz &= 1/3 (2yyyz + 2yyyz - yyyz - yyyz - xyyyz) & (60) \\
 xyxzz &= -xxzz & (60)
 \end{aligned}$$

3) A_{1g} components (72 independent)

$$\begin{aligned}
 xyxyz &= -2xxxx + 3yyyy \\
 yxxxx &= \\
 xxyyy &= xxxx - yyyyy + xxyy + xxyy + xxyy \\
 yxyxy &= -xxxx + 2yyyy
 \end{aligned}$$

$-xyxy - xxyx$
 $-xyyz$
 $-xyxz$
 $-xyxz$

results on a general sixth-order axial tensor in all the crystallographic groups ⁽¹⁷⁾: we wish to thank him for correspondence on the subject. We wish to thank also G. LANZAVECCHIA for considerable help in performing the entire algebraic calculation (Spring 1952) and F. BASSANI for checking parts of it.

⁽¹⁷⁾ The forthcoming publication of these results was announced in *Acta Cryst.*, 6, 107 (1953).

RIASSUNTO (*)

Si derivano gli schemi delle componenti dei tensori generali polari e assiali di quinto e sesto ordine per tutti i gruppi cristallografici applicando il metodo dell'ispezione diretta pei gruppi triclinico, monoclinico rombico, tetraedrico e cubico e con l'ausilio della teoria elementare dei gruppi per il trigonale e l'esagonale.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Ultrasonic Grating Remaining after the Stopping of the Ultrasonic Wavers (III).

A. CARRELLI e F. PORRECA

Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 15 Aprile 1953)

Summary. — In this paper the Authors state that also other substances besides the ones mentioned in the foregoing papers, namely HgCl and BaSO_4 in aqueous suspensions, show, at the stopping of the ultrasonic waves persistence of the diffracted lines of even order. Experiment shows further that the duration of persistence of the lines after the stopping of the ultrasonics, depends on the conditions of stationarity of the ultrasonic waves acting in the liquid and is maximal when the distance covered by the ultrasonics is an integer multiple of $\lambda/2$, λ being the ultrasonic wavelength in the liquid, and of the effect so observed a theoretic explanation is given. Finally the measures are given which for the various substances give the time of persistence of the lines t_p ; as a function of the duration t_u ; and the power of the ultrasonics with frequencies of 0.59 MHz, 1.77 MHz, 2.91 MHz, 4.13 MHz.

In previous notes ⁽¹⁾ ⁽²⁾, we have already observed the effect due to the passage of ultrasonic waves in binary mixtures of certain organic powders in certain liquid means. We had, in fact, observed in such substances that on stopping the ultrasonic, in the case of standing supersonic waves, the diffraction figure due to the ultrasonic grating did not completely disappear, but the even lines remained visible for some seconds, while the odd ones disappeared immediately after the ultrasonic waves were stopped.

The organic powders experimented by us which behave in this way are starch, ovoalbumin and polyvinyl alcohol. Continuing this type of researches, we are now able to report that two inorganic salts, practically insoluble

⁽¹⁾ A. CARRELLI and F. PORRECA: *Nuovo Cimento*, **9**, 90 (1952).

⁽²⁾ A. CARRELLI and F. PORRECA: *Nuovo Cimento*, **10**, 98 (1953), II note.

in water, HgCl and BaSO_4 also behave in the same way (the solubility of HgCl is $3,8 \cdot 10^{-5}$ g/dl and that of BaSO_4 is $2,29 \cdot 10^{-4}$ g/dl).

These substances subjected to standing supersonic waves, produce, on stopping the waves, even diffracted lines that remain for more than 10 s after the stopping of the ultrasonic waves. The concentration used, for such salts, i.e. the mass of powder salt for every unit of liquid volume, is $5 \cdot 10^{-2}$ g/l.

The duration of the persistence of the lines, after the ultrasonic waves have been stopped, is much influenced by the conditions of stationarity of the waves emitted in the liquid.

To show this, the vessel containing the liquids under experiment was supplied with a flat reflecting plate, which with proper micrometric screws can be set parallel to the emitting surface of the quartz generating the ultrasonics, and which can also be shifted parallel to itself, thus varying the space covered by the ultrasonic waves.

Having obtained the parallelism between the emitting surface of the quartz and the reflecting wall, we measured the duration t_p of the permanence of the diffracted lines in relation to the distance between the quartz and the reflector, obtaining the curves of fig. 1, in which the abscissa indicates such distances

and the ordinate the duration of the persistence of the lines. Fig. 1 a) refers to the measurements made for starch in water and fig. 1 b) to BaSO_4 in water under the same experimental conditions.

It is to be concluded from an examination of the data obtained, that, under certain conditions of the reflector, the duration t_p of persistence of the even lines is maximum.

Such positions are equidistant (in the curves of fig. 1 these maxima are 0.405 mm distant from one another, equal to $\lambda/2$ of the liquid under exper-

iment) and the passage from one to another of these is made by shifting the reflector wall a distance equal to a whole multiple of half the length of the ultrasonic wave relative to the liquid under examination.

On the basis of this most important result, the experimental fact of the disappearance of the odd lines and of the persistence of the even ones, when the ultrasonic waves are stopped, can be interpreted. It is known, in fact,

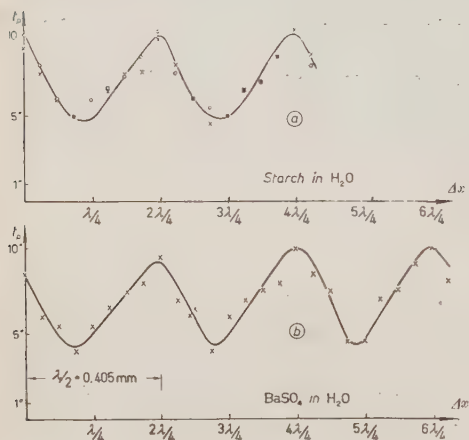


Fig. 1.

that when the waves are stationary, due to the transmission of the ultrasonics in the liquids, a pressure wave is propagated of equation:

$$(1) \quad \Delta p = 2\Delta p_0 \cos 2\pi \left(\frac{l-x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

where Δp_0 is the maximum of the variation of pressure, l the distance between the emitting surface of the quartz and the reflecting one, x the abscissa in the direction of the propagation of the ultrasonic waves, T and λ the period and the wave-length of the ultrasonics in the substance under consideration.

Under these conditions the theory ⁽³⁾ ⁽⁴⁾, implies, in the focal plane F of a convergent optic system on which the pencil of rays of light, coming from the liquid subjected to the ultrasonic waves (fig. 2) strikes, the presence of a diffraction spectrum, simmetrically placed in relation to the image of the luminous slit S of the collimator: the line of order n is due to the pencil of rays of light diffracted by the ultrasonics, which forms an angle ϑ_n (fig. 3) with the direction z of the incident light, given by the following relation:

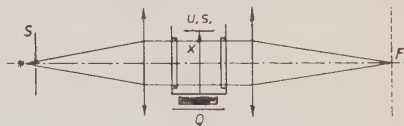


Fig. 2.

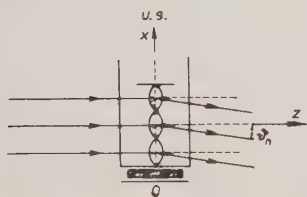


Fig. 3.

$$(2) \quad \sin \vartheta_n = n \frac{\lambda^*}{\lambda},$$

where n can assume all the integer, positive and negative values, including zero, and where λ^* is the wave-length of the light.

On the other side, due to the pressure wave given in the relation (1), a field of variable forces is also generated within the liquid by the same law that sets in oscillation the particles suspended in the liquid, and thus a stationary condition of accelerations is established of the type:

$$(3) \quad \ddot{x} = 2\ddot{x}_0 \cos 2\pi \left(\frac{l-x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

which, acting on the solid particles in suspension, sets them, grouping them

⁽³⁾ R. LUCAS and P. Biquard: *Journ. de Phys.*, **7**, 464 (1932).

⁽⁴⁾ C. V. RAMAN and N. S. NAGENDRA NATH: *Proc. of the Ind. Ac. of Sc.*, **3**, 79 (1936).

in the points of abscissa which are nodes of displacement, dispersing them in the places of abscissa which are loops of displacement and pressure nodes. We have therefore a phenomenon perfectly analogous to that which is brought about by the propagation of sound in a Kundt tube under conditions of stationarity.

The nodes of displacement or loops of pressure, as one can easily understand from relation (1), are situated in the points of abscissa x given by the formula:

$$x = l - 2n \frac{\lambda}{4}.$$

We can therefore conclude that the ultrasonics have the effect of arranging the particles suspended in the liquid, grouping them in planes equidistant one from the other by $\lambda/2$. As a result of this, if we admit that such a state of things produces an alteration in the refractive index which remains for a certain duration, after the stopping of the ultrasonics, until the suspended particles by their own movements destroy the orientation due to the ultrasonic action, during this time they constitute by themselves a grating of constant equal to $\lambda/2$, which diffracts the light.

It therefore generates diffracted lines whose order n' complies with the noted relation:

$$\frac{\lambda}{2} \sin \vartheta_{n'} = n\lambda^*, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

otherwise

$$(4) \quad \sin \vartheta_{n'} = 2n \frac{\lambda^*}{\lambda} = n' \frac{\lambda^*}{\lambda}.$$

On comparing (4) with (2), the immediate result is that $\vartheta_{n'} = \vartheta_{2n}$, that is the diffracted pencils of rays of light of order n' , remaining after the stopping of the ultrasonics, have the same direction as the diffracted pencils of rays of light of even order $2n$ obtained during the emission of the ultrasonic waves.

Naturally, in order to reach this arrangement of the particles in the nodal planes, it is necessary that the ultrasonic waves work for a certain duration; in other words, the time of the persistence of the lines from the moment in which the waves stop, depends upon the duration of the ultrasonic action.

In order to be able to study in more detail this dependence, we did some experiments, in which the suspension under examination was subjected to the ultrasonics for a certain time t_u and afterwards we measured the time of the duration t_p of the even lines.

The measurements were taken for a given ultrasonic power and the curves obtained for the various substances examined are compared.

In our experiments we took the number of lines diffracted by the ultrasonics as index of power, as other authors have already done ⁽⁵⁾. This rule

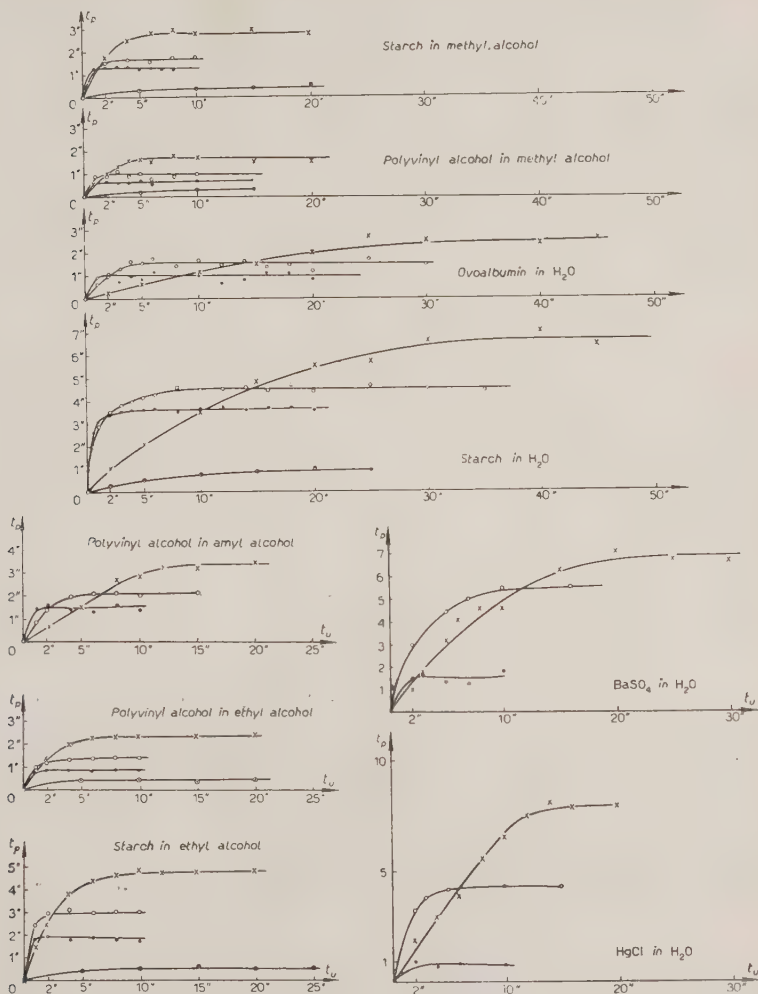


Fig. 4. — \odot 0,590 MHz; \times 1,770 MHz; \circ 2,950 MHz; \bullet 4,130 MHz.

is not extremely exact, as will be explained in more detail later on, but it is sufficient for the limitations of our needs. In particular, the measures of

⁽⁵⁾ D. SETTE: *Nuovo Cimento*, 2, 142 (1949).

which we speak, were taken for an ultrasonic power for which it was possible to see the appearance of the 4th order of the lines diffracted in presence of the ultrasonics. The measures were taken at various frequencies: 0.590 MHz, 1.770 MHz, 2.950 MHz and 4.130 MHz which correspond to the fundamental frequency and to the superior harmonics of the piezoelectric quartz used.

The suspensions used have all the same concentration of 0.2 g/l. The results are visible in fig. 4. From the direction of these curves it is possible, first of all, to state that the duration of the lines, t_p , increases when t_u (duration of the ultrasonics) increases, and reaches a constant value for a duration t_u of the ultrasonics characteristic of the two substances under examination, for a given frequency and variable with the frequency for the same substance.

TABLE I.

	1.770 MHz	2.950 MHz	4.130 MHz
Starch in H ₂ O	30 ^s ± 10	8 ^s ± 3	3 ^s ± 2
Ovoalbumin in H ₂ O	30 ^s ± 10	6 ^s ± 2	2 ^s ± 1
Starch in Methyl Alcohol	8 ^s ± 3	3 ^s ± 2	1 ^s ± 1
Starch in Ethyl Alcohol	12 ^s ± 4	3 ^s ± 2	1 ^s ± 1
Polyvinyl Alcohol in Methyl Alcohol	6 ^s ± 3	3 ^s ± 2	1 ± 1
Polyvinyl Alcohol in Ethyl Alcohol	8 ^s ± 3	4 ^s ± 2	2 ^s ± 1
Polyvinyl Alcohol in Amyl Alcohol	15 ^s ± 5	6 ^s ± 3	2 ^s ± 1
BaSO ₄ in H ₂ O	25 ^s ± 10	12 ^s ± 3	3 ^s ± 2
HgCl in H ₂ O	15 ^s ± 5	6 ^s ± 3	3 ^s ± 2

To facilitate, in table I, the minimum duration of the ultrasonics is shown, for the various frequencies, beyond which the life of the lines for the various substances is constant. This minimum duration decreases with the increase of frequency.

We can deduct from this that a certain time of ultrasonic action is necessary to obtain the maximum order of the particles suspended in the liquid under examination and that this time depends on the frequency: the higher the frequency the more rapidly their orientation in the liquid is brought about.

It is easy to foresee that the duration t_p of the lines remaining at the stopping of the ultrasonics must depend, not only on the duration of the ultrasonic action, but also on the intensity of the waves emitted by the quartz. The effect must increase with the increase of power of the ultrasonics which produces the grouping of the particles suspended in the nodal planes. In order to obtain the experimental law by which t_p varies in dependence on the power within the widest possible limits, we chose substances for which, increasing the feeding potential of the plate of the oscillator, it was possible to obtain the greatest number of diffracted lines in the focal plane. The substances examined are methyl, ethyl and amyl alcohols containing polyvinyl alcohol in the same concentration 0.2 g/l subjected to ultrasonics of same duration.

With these substances on the fundamental frequency we succeeded in observing lines as far as the 14th order.

Now it is necessary to determine that the method chosen for the comparison among the ultrasonic powers, consisting in a reference to the number of lines diffracted by the ultrasonics in various liquids, does not authorise us to state that the ultraacoustic vibrations emitted were of the same power.

In fact, it is well known that the presence of a certain number of diffracted lines depends on the value of the parameter

$$v = \frac{2\pi \Delta n_0 a}{\lambda^*},$$

where « a » is the tract of the luminous band which crosses the liquid and is subjected to the ultrasonics, λ^* is the wave-length of the light and Δn_0 is the maximum of the variability of the refractive index.

In fig. 5 we thought expedient to trace the curves which are obtained from the theoretic-experimental ones of intensity (⁶), carrying the number of lines diffracted in dependence of the parameter v .

On the basis of these curves it is possible to state that using the same vessel and the same source of light, an almost linear procedure, at least as far as the 6th order, exists between the number of diffracted lines by the ultrasonics and Δn_0 .

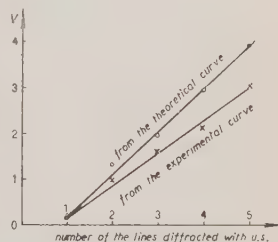


Fig. 5.

(⁶) L. BERGMANN: *Der Ultraschall*, 198 (1949).

But it is known, that ⁽⁷⁾:

$$\Delta n_0 = \mu \Delta p_0 \frac{(n_0^2 - 1)(n_0^2 + 2)}{8n_0} \quad \text{where} \quad \Delta p_0 = \sqrt{2\rho_0 V \bar{\omega}},$$

n_0 is the average refractive index under examination, ρ_0 the density of the liquid, μ its coefficient of compressibility, V the ultrasonic speed of the means under examination and $\bar{\omega}$ the power for cm^2 emitted by the quartz.

TABLE II.

	0.590 MHz	1.770 MHz	2.950 MHz	4.130 MHz
Polyvinyl Alcohol in Methyl Alcohol	$3.2^s \pm 0.5$	$2.5^s \pm 0.3$	$1^s \pm 0.2$	$0.7^s \pm 0.2$
Polyvinyl Alcohol in Ethyl Alcohol	$5.1^s \pm 1$	$2.9^s \pm 0.5$	$1.6^s \pm 0.3$	$1.2^s \pm 0.2$
Polyvinyl Alcohol in Amyl Alcohol	$7.5^s \pm 1.5$	$4.5^s \pm 1$	$2.2^s \pm 0.5$	$1.5^s \pm 0.3$
BaSO ₄ in H ₂ O		$8.4^s \pm 0.50$	$5.2^s \pm 0.5$	$1.5^s \pm 0.3$
HgCl in H ₂ O		$10.5^s \pm 2.0$	$4.3^s \pm 0.5$	$1^s \pm 0.5$
Starch in H ₂ O		$14.5^s \pm 2.0$	$6.3^s \pm 1.0$	$4.3^s \pm 1.0$

Therefore, if in two substances the same number of lines is obtained, it is possible to state with exactitude that they have the same maximum of variation of the refractive index, but not that they are subject to the same power. Nevertheless, since if one increases the number of diffracted lines generated by the ultrasonics, Δn_0 and $\bar{\omega}$ increase, it is clear that the procedure of t_p , expressed depending on the number of lines diffracted in presence of the ultrasonics, will be the same as that of the same curves obtained depending on the power.

Furthermore, one could pass from the first to the second, opportunely varying the values of the abscissa, according to the substance under examination.

Given this, let us see what results can be obtained from the above mentioned curves shown in fig. 6.

⁽⁷⁾ R. LUCAS and P. BIQUARD: *Journ. de Phys.*, **7**, 471 (1932).

These show the variation of t_p in dependence of the number of lines diffracted by ultrasonics of the same duration. We also extended the measurements to BaSO_4 in water, HgCl in water and starch in water.

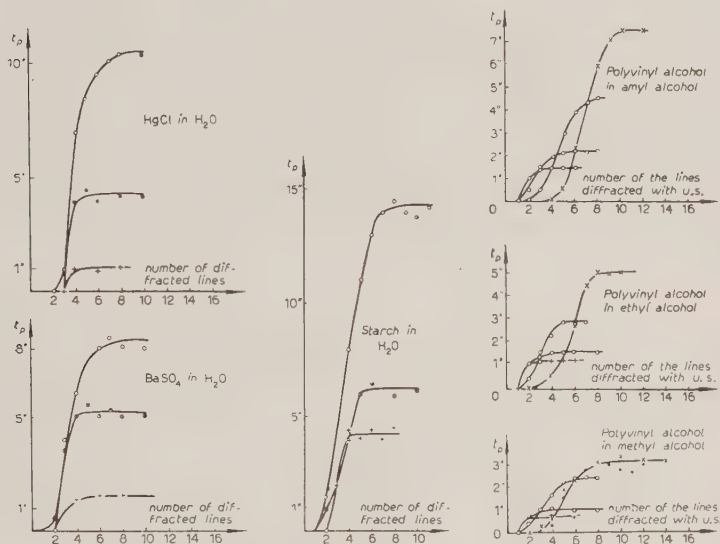


Fig. 6. — x 0.590 MHz; o 1.770 MHz; ⊙ 2.950 MHz; + 4130 MHz.

It is to be observed that t_p increases with the increase of power until it reaches a constant maximum value, which depends on the frequency for every substance: it increases sharply with the decrease of frequency, as can be clearly seen from the data collected for facility in table II, which shows, for the substances examined, the maximum values t_p obtained for the various frequencies.

Furthermore, in order to reach the maximum, a power which increases with the decrease of frequency is needed. In conclusion, remembering what was said of the effects produced by the duration of the ultrasonics, we can say that the increase of the power, for a certain duration of the ultrasonics, produces variation of the time t_p of the lines, in the same direction as those produced by the increase of the duration of the ultrasonics, at constant power.

RIASSUNTO

In questo lavoro si comunica che altre sostanze, oltre quelle già ricordate nelle precedenti note, presentano l'effetto di persistenza delle righe diffratte di ordine pari, al cessare degli ultrasuoni, e tali sostanze sono HgCl e BaSO_4 in sospensioni acquose. Si verifica sperimentalmente, inoltre, che la durata di persistenza delle righe, al cessare degli ultrasuoni, dipende dalle condizioni di stazionarietà degli ultrasuoni che si propagano nel liquido ed è massima quando la lunghezza del tratto percorso dagli ultrasuoni è un multiplo intero di $\lambda/2$, essendo λ la lunghezza d'onda ultrasonora nel liquido in esame. In base a questo risultato sperimentale, si dà l'interpretazione teorica dell'effetto osservato. Infine si riportano le misure che danno il tempo di persistenza delle righe, t_p , in funzione della durata, degli ultrasuoni, t_u , e della potenza degli ultrasuoni, di frequenza uguale a 0,59 MHz, 1,77 MHz, 2,95 MHz, 4,13 MHz, relativamente alle varie sostanze.

On the Associated Penetrating Particles Underground

C. CASTAGNOLI, A. GIGLI (*) and S. SCIUTI

Istituto di Fisica dell'Università - Roma

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 24 Aprile 1953)

Summary — The cross-section for production of « associated penetrating particles » (*a.p.p.*), capable of penetrating at least 15 cm of Pb, by cosmic radiation at a depth underground of 50 m water equivalent, has been studied with a counter hodoscope. The results confirm those previously obtained and published by us, and they are briefly discussed and compared with recent ones by other authors.

The interaction of cosmic rays with matter at a depth equivalent to 50 m of H_2O has been studied by means of a GM-counter hodoscope and our results have been reported in a previous work.

In order to verify independently some of the results and in particular those related to the possible production of associated penetrating particles (*a.p.p.* or $p \wedge i$) we have carried on two other series of measurements (hereafter referred to as II and III) ⁽¹⁾ at the same depth.

The experimental arrangement used is substantially similar to that described in I but some variations have been introduced. In experiment II the thickness of the lead above counter tray *C* was increased from 5 to 10 cm, whilst the layer of lead of 5 cm placed above counter tray *D* was abolished. In this way it was possible to distinguish more easily the events of type $p \wedge 3$

(*) Dell'Istituto di Fisica dell'Università di Pavia, attualmente in congedo presso l'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma.

⁽¹⁾ E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI and S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **9**, 453 (1952); **9**, 969 (1952); *Proc. Phys. Soc.*, **65**, 556 (1952).

These experiments will be quoted hereafter as I. In this paper we are using the same notations used by these authors.

that could in I be confused either with events *d.e.s.* in *C* and *D* or with soft showers generated in the lead placed above the counter *C*. Whilst in the first case the absence of lead on *D* excludes the generation of *d.e.s.*, in the second case the ambiguity of interpretation was eliminated because of the increased sensitivity to soft showers recorded by counter tray *D* which was covered only by 5 g/cm² (due to a sheet of iron covering the apparatus).

In the deduction of the cross-section for the production of $p \wedge i$ from the experimental results, it is essential to calculate some geometrical factors. In

experiment III the separation of the trays of counters of the telescope has been reduced by a factor 2 to verify the correctness of our estimate of those geometrical factors.

Moreover, in I only the angular distribution at small angles with the vertical direction could be investigated, because the counter telescope then used was only sensitive at those angles. With the new experimental arrangements it was then possible to observe the angular distribution at much larger angles. As we wanted to maintain approximately the solid angle as before, we were

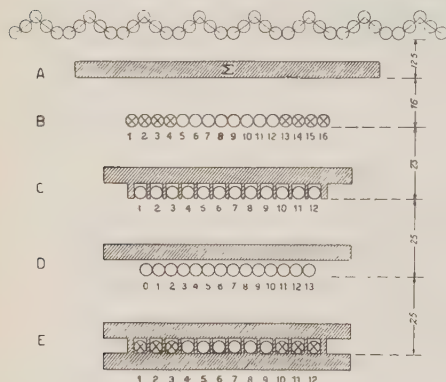


Fig. 1. — Counters \otimes can record secondary particles but do not contribute to the formation of the master pulse.

forced to reduce the number of *B* and *E* counters (on which the master pulse and the 4-fold coincidences were depending). On the other hand the counters thus excluded were still being used for the detection of occasional secondary particles so that the sensitivity of the apparatus was increased (fig. 1).

In table I we show the track-lengths in the «lead generator» Δ_E due to the incident penetrating particles (μ -mesons) under various experimental conditions. In experiments II and III the total length of tracks crossing Δ_E have been respectively 8440 and 9450 m Pb and the result obtained for the various types of events observed are in good agreement with those obtained in experiment I. Altogether the three following measurements give information on the interaction of penetrating particles with matter, as measured on a total length of tracks equal to ~ 54000 m in lead.

We want to discuss here only $p \wedge i$ events. The results of experiment II are shown in Table II and compared with those obtained in I. The last column of the table has been added to take in to account the fact that if the secondary

TABLE I.

	$\Delta_{\Sigma} = 5 \text{ cm Pb}$			$\Delta_{\Sigma} = 7.5 \text{ cm Pb}$			Total meters of Pb
	t_{\min}	C_4 (min^{-1})	$t \cdot C_4 \cdot \Delta_{\Sigma}$ (meters)	t_{\min}	C_4 (min^{-1})	$t \cdot C_4 \cdot \Delta_{\Sigma}$ (metres)	
I	36 668	12.63	23 156	13 846	12.40	12 917	36 073
II	5 342	12.61	3 368	5 344	12.63	5 062	8 430
III	13 194	14.31	9 430	—	—	—	9 430
			35 954			17 979	53 933

TABLE II.

Thickness T_i of Pb traversed by secondary particle (in cm Pb)	$P \wedge i$	$\sigma \text{ cm}^2/\text{nucleon}$		$\bar{\sigma}$ cm ² /nucleon	$\sigma_{\text{cor}} = \bar{\sigma} e^{T_i/18}$
		Exper. I	Exper. II		
$T_i = 5$	$i = 2$	$(6.3 \pm 1) \cdot 10^{-30}$	—	$(6.3 \pm 1) \cdot 10^{-30}$	$(8.2 \pm 1) \cdot 10^{-30}$
$T_i = 10$	$i = 3$	$(4.6 \pm 1) \cdot 10^{-30}$	$(1 \pm 5) \cdot 10^{-30}$	$(4.5 \pm 1) \cdot 10^{-30}$	$(7.8 \pm 1) \cdot 10^{-30}$
$T_i = 15$	$i = 4$	$(2.1 \pm 1) \cdot 10^{-30}$	$(7 \pm 4) \cdot 10^{-30}$	$(2.4 \pm 1) \cdot 10^{-30}$	$(5.5 \pm 1) \cdot 10^{-30}$

particles are π -mesons (*) the observed cross section for $p \wedge i$ production could largely differ from the true one because of the great absorption coefficient. Using for the interaction length of π -mesons the value

$$R_{\pi} \simeq 18 \text{ cm Pb},$$

found by COOL and PICCIONI⁽⁴⁾, the observed value of the cross section for production of $p \wedge 4$ (secondary particles penetrating at least 15 cm of lead) should be corrected by factor not greater than 2.

(*) This assumption seems to us a very reasonable consequence of our previous work; it has also been suggested by LEONTIC *et al*⁽²⁾ and APAPILLAI *et al*.⁽³⁾

(2) B. LEONTIC and A. W. WOLFENDALE: *Phil. Mag.*, **43**, 1335 (1952).

(3) V. APPAPILLAI, A. W. MAILVAGANAM and A. W. WOLFENDALE (private communication).

(4) R. L. COOL and O. PICCIONI: *Phys. Rev.*, **87**, 531 (1953).

This values of R_π has been preferred to those obtained from our preceding work and from work by LEONTIC and WOLFENDALE (respectively giving $R_\pi = 10 \pm 4$ cm Pb and $R_\pi = 14 \pm 4$ cm Pb). In these works R_π was deduced from absorption of the radiation in thin layers of matter and almost certainly the results were distorted by interference of events of electromagnetic nature.

The correction thus introduced does not affect the order of magnitude of the cross sections and the conclusions given in I. In experiment III the cross section for $p \wedge i$ was deduced using geometrical factors which had been recalculated in order to take into account the different geometry of the apparatus.

The observed angular distribution of the associated penetrating particles was found to be in good agreement with that observed in I, using a long telescope. We want to emphasize that also in these experimental conditions, with an apparatus which was capable of recording events at large angles, the cross section of $p \wedge 4$ type events is in excellent agreement with the others so far measured, in fact we have obtained

$$\sigma_{p \wedge 4} = (3 \pm 2) \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2/\text{nucleon}.$$

For $p.s. 4$ events we obtained, using the same apparatus

$$\sigma_{p, s, 4} = (2.7 \pm 0.6) \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2/\text{nucleon},$$

as compared with the value

$$\sigma_{p, s, 4} = (2.5 \pm 0.5) \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2/\text{nucleon},$$

previously obtained in I.

We can therefore say that the cross section for production of $a.p.p.$ is of the order of several tens of μ -barns, for secondary particles penetrating at least 5 cm of Pb; several μ -barns for secondary particles penetrating at least 15 cm of Pb.

This result has been confirmed in the recent papers by LOVATI *et al.* ⁽⁵⁾, W. D. WALKER ⁽⁶⁾, in experiments involving the use of cloud chambers.

The preliminary results of M. L. T. KANNANGARA and M. ZIVKOVIC ⁽⁷⁾ also give a similar indication.

⁽⁵⁾ A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **10**, 105 (1953).

⁽⁶⁾ W. D. WALKER (private communication to prof. AMALDI).

⁽⁷⁾ M. L. T. KANNANGARA and M. ZIVKOVIC (private communication of preliminary results).

We wish to express our gratitude to Prof. AMALDI for his continuous interest and many stimulating discussions.

RIASSUNTO (*)

La sezione d'urto per la produzione di « particelle penetranti associate » (a.p.p.), capaci di attraversare almeno 15 cm di Pb, da parte della radiazione cosmica ad una profondità sottoterra di 50 m di acqua equivalente è stata studiata con un odoscopio di contatori. I risultati confermano quelli precedentemente ottenuti e pubblicati da noi e sono brevemente discussi e confrontati con altri risultati ottenuti recentemente da altri autori.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*

Sul rapporto tra i numeri di neutroni e di protoni e su alcune proprietà della componente nucleonica a 3500 m s.l.d.m.

M. CONVERSI, G. MARTELLI e P. ROTHWELL

Istituto di Fisica dell'Università - Pisa

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Pisa

(ricevuto il 24 Aprile 1953)

Riassunto — Si studiano alcune proprietà della componente nucleonica presente a 3500 m sul l.d.m. mediante una camera a ioni del tipo veloce, circondata da contatori connessi ad un odoscopio a 22 canali. Sono riportati e discussi i risultati di un'analisi preliminare di oltre 13000 eventi, intesa principalmente ad ottenere alcune determinazioni precise del rapporto ϱ tra i numeri di stelle generate nella camera da neutroni e da protoni. Si trova, in particolare, $\varrho = 23 \pm 0,4$ per nucleoni di energia media $\bar{E} = 35$ MeV, mentre per $E > \sim 400$ MeV risulta $\varrho = 1,53 \pm 0,04$. Si determina la distribuzione zenitale dei protoni di energia media ~ 35 MeV, distribuzione che risulta bene rappresentata dalla legge $\cos^{2.8} \zeta$. Si mostra infine come i risultati sperimentali rientrino nel quadro generale delle attuali teorie fenomenologiche sulla componente nucleonica.

1. — Introduzione.

Numerose ricerche sulle proprietà della componente nucleonica della radiazione cosmica e sui processi nucleari cui essa dà luogo sono state effettuate, in questi ultimi tempi, impiegando la tecnica delle emulsioni fotografiche.

Questo potente metodo di investigazione appare particolarmente adatto allo studio di certi processi nucleari perchè in generale esso fornisce, per ciascun singolo evento, numerosi e ben precisi dettagli atti ad identificare le caratteristiche essenziali del processo e, spesso, anche la natura delle particelle che vi hanno preso parte. Ci sono però alcuni inconvenienti che limitano le possibilità del metodo: *a)* la notevole mole di lavoro che inevitabilmente comporta l'analisi delle lastre; *b)* la difficoltà di raggiungere una statistica sufficientemente buona ai fini della classificazione e dell'analisi statistica dei vari tipi di eventi osservati; *c)* la difficoltà di stabilire con una certa sicurezza il parti-

colare tipo di nucleo nel quale ha avuto luogo l'interazione nucleare; d) l'impossibilità di selezionare automaticamente quei particolari tipi di eventi che di volta in volta si desidera studiare; ecc.

Questi vari inconvenienti — del resto non del tutto indipendenti gli uni dagli altri — sono almeno in parte superati con la tecnica impiegata nella ricerca che costituisce l'oggetto di questo articolo.

Il metodo da noi impiegato consiste essenzialmente nel registrare le coincidenze tra una camera a ioni ed uno qualunque dei contatori da cui essa è circondata (fig. 1). Tali coincidenze pilotano un odoscopio il quale consente di identificare i particolari contatori che sono stati attraversati dalle particelle ionizzanti associate con l'evento nucleare generato nella camera. In tal modo è di regola possibile ottenere una rappresentazione dell'evento osservato, nel senso che si riesce a determinare, sia pure con qualche incertezza, la disposizione mutua delle proiezioni delle tracce ionizzanti su un piano verticale normale all'asse della camera. Per una vasta classe di eventi è possibile riconoscere, in particolare, se la particella che ha prodotto un evento è carica o neutra.

Naturalmente il metodo impiegato in questa ricerca non si presta, come quello delle emulsioni fotografiche, all'analisi accurata del singolo evento. Le incertezze che sussistono nel caso dell'evento isolato scompaiono però, come vedremo, allorchè applicando degli opportuni metodi di analisi statistica, si ricercano le proprietà medie degli eventi di una classe prescelta.

Con il nostro apparecchio, descritto nel paragrafo successivo, sono stati registrati oltre 13 000 eventi al Laboratorio della Testa Grigia (Cervinia - Aosta). Nel presente articolo riportiamo i risultati di una analisi di tali eventi intesa ad ottenere informazioni varie sulla natura della componente nucleonica presente alla quota di osservazione (3 500 m sul l.d.m.).

2. — Appareato sperimentale.

La disposizione mutua della camera a ioni e dei contatori G.M. è rappresentata in scala nella fig. 1 (sezione del dispositivo normale all'asse della camera).

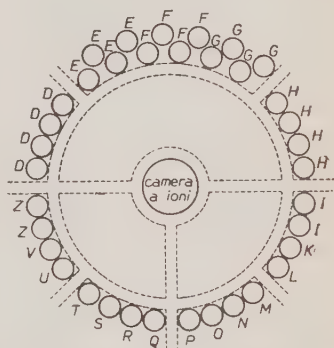


Fig. 1. — Disposizione mutua della camera a ioni e dei contatori G.M. (sezione verticale normale all'asse della camera). Le linee tratteggiate indicano il supporto.

La camera impiegata, già descritta in un lavoro di BUSCHMANN, QUERCIA e RISPOLI ⁽¹⁾, è del tipo veloce ed a pareti sottili (0,3 mm di ottone, con alcuni anelli di rinforzo spessi 1 mm). Lo spessore medio equivalente delle pareti è di circa 0,5 mm. Nelle condizioni delle misure qui riportate, ossia con 7,5 atmosfere di Argon nella camera, si può valutare, grossolanamente, che il 15% delle evaporazioni registrate ha origine nel gas (peso atomico 40), mentre il residuo 85% è prodotto nelle pareti di ottone (peso atomico medio 64).

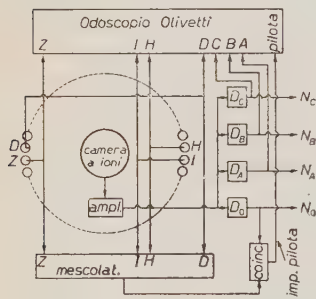


Fig. 2. — Illustrazione del metodo per la registrazione degli eventi generati nella camera a ioni.

Lo schema di principio di fig. 2 illustra il metodo di registrazione degli eventi. Gli impulsi dei contatori D , E , ..., Z , opportunamente amplificati e ridotti in durata a $20 \mu s$, sono inviati ad altrettanti canali di un odoscio costruito dalla ditta Olivetti ⁽²⁾. Al tempo stesso essi vengono mescolati e fatti coincidere con quegli impulsi della camera che hanno, all'uscita dell'amplificatore, una ampiezza maggiore di un certo valore aggiustabile operando sul circuito di discriminazione D_0 (ossia variandone la « tensione di taglio »).

Tale valore è stato mantenuto durante le misure piuttosto basso (in prossimità di quello corrispondente ad una particella α del preparato di Po) al fine di minimizzare l'effetto nocivo dei ritardi associati con il tempo di salita degli impulsi della camera.

L'impulso « pilota », necessario perchè l'odoscio possa indicare i contatori che sono stati scaricati in un certo evento, è ottenuto facendo coincidere gli impulsi dei contatori con quelli della camera all'uscita di D_0 . L'effettiva registrazione dell'evento è poi affidata ad una telescrivente che batte su un rotolo di carta le lettere corrispondenti ai canali dell'odoscio che hanno ricevuto l'impulso.

(1) J. BUSCHMANN, I. F. QUERCIA e B. RISPOLI: *Nuovo Cimento*, **7**, 457 (1950).

(2) D. GARELLI e I. F. QUERCIA: *La Ric. Scient.*, **22**, 276 (1952).

I canali A , B , C dell'odoscopio sono utilizzati per determinare, in ciascuno degli eventi osservati, l'intervallo entro il quale è compresa la corrispondente energia spesa per ionizzazione nel gas della camera. Essi infatti ricevono soltanto quegli impulsi che, all'uscita dell'amplificatore lineare, hanno una ampiezza maggiore di quella dei corrispondenti « tagli » dei circuiti di discriminazione D_A , D_B , D_C . Nelle misure questi tagli sono stati fissati in corrispondenza di 1,3; 2,0; $3,0V_\alpha$. Gli impulsi detti sono pure inviati ai circuiti di numerazione N_A , N_B , N_C al fine di registrare anche quegli eventi generati da particelle non ionizzanti e nei quali le particelle ionizzanti emesse non hanno energia sufficiente ad attraversare le pareti della camera e dei contatori.

3. — “ Rami ” degli eventi nucleari rivelabili con l'apparecchio. Correzioni.

Per poter essere rivelate dall'odoscopio, le particelle ionizzanti emesse in un evento nucleare (o « stella ») originato nell'interno della camera a ioni, debbono attraversare in media 1,3 mm di ottone (somma degli spessori medi della camera e dei contatori). La corrispondente energia è di circa 25 MeV per un protone, di 9–10 MeV per un mesone. L'energia di 25 MeV corrisponde proprio al limite posto, nella nomenclatura usata nella tecnica delle emulsioni fotografiche ⁽³⁾, tra protoni « grigi » e « neri ». Le particelle secondarie rivelabili con il nostro apparecchio, ossia i « rami rivelabili » emessi nell'evento nucleare registrato dalla camera, comprendono perciò tutti i « protoni grigi ». Essi includono invece solamente l'85% circa dei « mesoni grigi ». Poichè però è noto dai lavori con le lastre fotografiche ⁽³⁾ che solo una piccola percentuale (circa 6%) delle tracce grigie è dovuta a mesoni, possiamo concludere che il numero dei rami rivelabili con l'odoscopio rappresenta praticamente la somma $N_g + n_s$ delle tracce grigie e di quelle sottili (« shower particles ») osservate nelle emulsioni fotografiche.

Nel seguito, parlando semplicemente dei rami di una stella, intenderemo riferirci ai rami (« grigi » e « sottili ») rivelabili con il nostro odoscopio. Infine, per rendere più conciso il linguaggio, parleremo di « rami in avanti » o di « rami all'indietro » con riferimento ai rami di una stella che formano, con la verticale orientata verso il basso, un angolo rispettivamente minore o maggiore di 90°.

Se nella registrazione di un evento risultano colpiti ad opera delle particelle ionizzanti secondarie r dei contatori che circondano la camera, il numero effettivo di tali particelle, ossia il numero dei « rami della stella », può essere

⁽³⁾ U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

maggiore di r perchè: *a*) può accadere che più di un ramo attraversi lo stesso contatore; *b*) uno dei rami può essere emesso in direzione tale da non colpire nessuno dei contatori.

Per ottenere la corretta distribuzione del numero delle stelle rispetto al numero dei loro rami occorre perciò introdurre le dovute correzioni. Di queste, quella dovuta alla causa d'errore *b*) può essere legittimamente trascurata, come si riconosce facilmente tenendo conto della geometria del nostro apparato. Nel caso *a*) la correzione non è trascurabile (specie per le stelle a molti rami) e può essere valutata se si conoscono le probabilità p_{rs} che una stella ad r rami appaia come una stella ad $r-s$ rami perchè soltanto $r-s$ dei contatori sono colpiti.

Detto N_r il numero delle stelle i cui rami producono la scarica di r contatori ed n_r il numero delle stelle ad r rami si ha infatti:

$$(1) \quad \begin{cases} N_1 = n_1 + p_{21}n_2 + p_{32}n_3 + \dots \\ N_2 = n_2 + p_{31}n_3 + p_{42}n_4 + \dots - (p_{21}n_2 + p_{32}n_3 + \dots) \\ \dots \end{cases}$$

Poichè risulta

$$(2) \quad p_{32}n_3 \ll p_{21}n_2, \quad p_{42}n_4 \ll p_{31}p_3 \dots$$

indicando semplicemente con p_r le probabilità p_{r1} , dalle (1) si ricava:

$$(3) \quad \begin{cases} n_1 = N_1 - p_2 n_2 \\ n_2 = (N_2 - p_3 n_3)/(1 - p_2) \\ \dots \\ n_r = (N_r - p_{r+1} n_{r+1})/(1 - p_r) \end{cases}$$

Per determinare le p_r gli eventi registrati con il nostro apparato a 3500 m sul l.d.m. sono stati dapprima classificati in base al numero r di contatori scaricati nella semicorona inferiore $I-Z$ (fig. 1). Per ciascuna delle classi di eventi così ottenute si sono poi determinate le frequenze degli eventi nei quali l'angolo minimo tra due tracce (nel piano verticale in cui esse si possono immaginare proiettate) risulta non maggiore di 1, 2, 3, ..., 11 volte l'angolo piano sotto cui dal centro della camera in fig. 1, si vedono due contatori adiacenti. In tal modo, per ciascun valore di r (> 2), si sono ottenuti 11 punti dalla curva che dà la probabilità che l'angolo minimo tra due rami di una stella

ad r rami sia minore di un generico angolo θ . Estrapolando al valore di θ corrispondente all'angolo sotto cui dal centro di fig. 1 si vede un singolo contatore, si ottengono allora i valori delle p_r riportati in tabella I (⁴).

TABELLA I.

r	p_r	
2	14	%
3	19	%
4	24	%
5	30	%
6	35	%
7	40,5	%

Probabilità che una stella ad r rami appaia come una stella ad $r-1$ rami per effetto del passaggio di due dei rami attraverso il medesimo contatore. I valori riportati in tabella per p_r sono quelli corrispondenti alla retta più probabile che passa per i sei punti sperimentali. Gli errori relativi alle p_r non sono riportati perchè non hanno apprezzabile influenza sulle distribuzioni delle stelle cui la piccola correzione proveniente dalle p_r va applicata.

È forse opportuno rilevare che, sebbene p_r cresca rapidamente con r , nella generica equazione $N_r = n_r + p_{r+1} - p_r n_r$ il termine correttivo ($p_{r+1} n_{r+1} - p_r n_r$) non dipende da r in modo critico, e la correzione da introdurre nella distribuzione delle stelle rispetto al numero dei rami si mantiene relativamente piccola per ogni valore di r (essa ha invero un effetto abbastanza rilevante solo nel passaggio dalle stelle ad un ramo a quelle a due rami perchè in questi due casi, come si vede dalle (1) e (2), essa agisce in senso opposto). Notiamo pure di sfuggita che le condizioni (2), sotto cui valgono le (3), sono largamente soddisfatte almeno finchè le correzioni si applicano, come qui abbiamo fatto, limitatamente alle stelle aventi meno di sette rami.

4. — Rapporto ρ tra i numeri di stelle senza rami all'indietro prodotte da neutroni e da protoni.

Una prima determinazione del rapporto ρ tra i numeri di stelle senza rami all'indietro (§ 3) prodotte rispettivamente da neutroni e da protoni è stata ottenuta prendendo in considerazione le due classi di stelle corrispondenti ai due seguenti tipi di eventi:

a) eventi nei quali nessuno dei contatori della semicorona superiore (fig. 1) è scaricato;

(⁴) Si noti che in realtà le p_r sono state determinate, con il procedimento indicato, prendendo in considerazione i soli rami in avanti. Ciò non ha peraltro grande importanza ai fini delle correzioni, comunque assai piccole, che si dovranno introdurre nei dati mediante le p_r (§ 7).

Cogliamo qui l'occasione per ringraziare l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (Impianti I. B. M.) del C.N.R., dove il computo delle p_r è stato eseguito mediante analisi di schede forate.

b) eventi nei quali è colpito uno dei contatori F e nessuno degli altri contatori della semicorona superiore.

Gli eventi della classe *a*) vengono interpretati come stelle prodotte da neutroni perchè, come risulta dal calcolo, la probabilità che un protone generi una stella nella camera senza essere rivelato dai contatori della semicorona superiore è inferiore al 5% ⁽⁵⁾.

Gli eventi del tipo *b*) sono invece interpretati come stelle generate da protoni che incidono attraverso uno dei contatori F della semicorona superiore, perchè la probabilità che un evento *b*) sia causata da un neutrone, risulta, dai dati di tabella IV, paragrafo 5, minore del 3% ⁽⁶⁾.

Dai numeri di eventi *a*) e *b*) registrati si sono calcolati i numeri effettivi di stelle mediante le (3). I risultati sono riportati nella terza e quarta colonna della tabella II. Nell'ultima colonna di questa tabella sono dati i valori del rapporto ϱ per le stelle a diverso numero di rami. Tali valori sono stati dedotti tenendo conto del fatto che il numero dei protoni che producono stelle provenendo da ogni possibile direzione è uguale a circa 2,8 volte il numero dei protoni che attraversano i contatori F . Il fattore 2,8 è il risultato di un calcolo basato sulla geometria dell'apparato e sulla distribuzione zenitale dei protoni ⁽⁵⁾.

TABELLA II.

r	Numero degli eventi con r contatori colpiti nella semicorona inferiore e in quella superiore:		Numero corretto di stelle senza rami all'indietro prodotte da:		Rapporto ϱ tra i numeri di stelle generate da neutroni e da protoni
	nessuno	1 F (fig. 1)	neutroni	protoni per uno degli F	
1	1418	227	1346 ± 35	206 ± 14	$2,34 \pm 0,16$
2	478	137	516 ± 24	142 ± 12	$1,30 \pm 0,12$
3	163	69	177 ± 14	78 ± 9	$0,81 \pm 0,11$
4	73	22	81 ± 9	25 ± 5	$1,15 \pm 0,26$
5	33	7	40 ± 7	10 ± 4	$1,43 \pm 0,50$
6	(7)	(7)	—	—	—

Rapporto tra i numeri di neutroni e di protoni che generano stelle aventi il numero r di rami in avanti indicato nella prima colonna e nessun ramo all'indietro. Il valor medio di ϱ che si deduce dai dati della tabella è $\varrho = 1,67 \pm 0,08$.

⁽⁵⁾ Si è assunta per i protoni che generano le stelle osservate una distribuzione zenitale del tipo $\cos^3 \zeta$, quale approssimativamente risulta da un'analisi dei risultati che verrà pubblicata in un successivo articolo (v. anche § 6).

⁽⁶⁾ Infatti la probabilità che un neutrone generi una stella con un ramo all'indietro è (v. Tab. IV) $\cong 0,18$ e la probabilità che il ramo emesso all'indietro attraversi uno dei contatori F è $\sim 0,15$.

Rileviamo che i risultati riportati nella tabella si riferiscono a stelle *non aventi rami all'indietro*.

Il valore medio del rapporto ϱ per le *stelle aventi almeno un ramo in avanti e nessun ramo all'indietro* risulta pertanto:

$$(4) \quad \varrho = 1,67 \pm 0,08.$$

5. — Probabilità che un nucleone generi una stella con i rami all'indietro.

Circa la metà delle misure sono state effettuate, a 3500 m, con l'apparato di fig. 1 capovolto. I seimila e più eventi registrati in queste condizioni sono stati classificati in base al numero i dei contatori colpiti nella semicorona superiore I - Z . Dai numeri N_i così ottenuti, riportati nella terza colonna della tabella III, si sono dedotti i numeri n_i , corretti per le probabilità p_i che due particelle attraversino lo stesso contatore della semicorona superiore. Per far questo si è fatto uso ancora delle (3), introducendo le probabilità p_i al posto delle p_r . Nel calcolo delle p_i , analogo a quello delle p_r di tabella I, si è tenuto conto del fatto che se l'evento è prodotto da un neutrone allora i rappresenta il numero dei rami emessi all'indietro, mentre se l'evento è causato da un protone il numero dei rami emessi all'indietro è $i - 1$. Le p_i sono state valutate inoltre sotto le ipotesi che: *a*) la distribuzione angolare dei rami emessi all'indietro sia isotropa; *b*) per gli eventi in cui sono colpiti due o più contatori della semicorona superiore sia $\varrho = 1$. Quest'ultima ipotesi appare giustificata se si osserva che le stelle con almeno un ramo all'indietro hanno in media una energia maggiore di quella delle stelle per le quali nel paragrafo precedente si è trovato $\varrho = 1$.

TABELLA III.

i	p_i	N_i	n_i	
0	—	(2278)	(2278)	Distribuzione delle frequenze N_i degli eventi nei quali i contatori della semicorona superiore sono colpiti (misure eseguite con l'apparecchio di fig. 1 capovolto). I numeri n_i sono corretti, in base alle (3), utilizzando le probabilità p_i che due delle i particelle attraversino lo stesso contatore.
1	—	2613	2541	
2	0,10	703	735	
3	0,17	229	253	
4	0,22	77	88	
5	0,28	25	29	
6	0,33	11	13	
7	0,38	6	—	

D'altra parte la prima ipotesi risulta approssimativamente verificata, tanto dai lavori con le lastre fotografiche (3), quanto da un'analisi ulteriore dei nostri dati che verrà discussa in un prossimo articolo.

Se ora denotiamo con p_{pi} , p_{ni} , la probabilità che un protone o rispettivamente un neutrone generi una stella con i rami all'indietro, valgono le relazioni:

$$(5) \quad \begin{cases} n_1 = p_{p0}N'_p + p_{n1}N_n \\ n_2 = p_{p1}N'_p + p_{n2}N_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ n_i = p_{p(i-1)}N'_p + p_{ni}N_n, \end{cases}$$

dove N'_p ed N_n rappresentano i numeri totali di protoni e di neutroni che generano le stelle osservate (la loro somma è uguale al numero totale di stelle registrate con l'odoscopio).

Poichè, come risulta dalla tabella III le n_i decrescono rapidamente con i , per un valore convenientemente elevato di k (in pratica basta scegliere $k=6$) si può assumere semplicemente $n_k = p_{p(k-1)}N'_p$ giacchè l'errore che si commette trascurando il termine $p_{nk}N_n$ è certamente contenuto in quello statistico.

Se si osserva allora che per ogni $i \geq 1$ risulta $p_{pi}N'_p = p_{ni}N_n$ (poichè per le stelle con almeno un ramo all'indietro si è già detto che è sensibilmente $\varrho = 1$) i valori comuni a questi prodotti si ottengono per sostituzioni successive partendo dalla k -esima delle (5) fino ad ottenere $p_{p0}N'_p$. D'altra parte il prodotto $p_{n0}N_n$, che rappresenta il numero totale degli eventi nei quali nessuno dei contatori della semicorona superiore è colpito, è noto direttamente dalle misure ($= 2278$).

Sommando i prodotti detti ed osservando che $\sum_0^{\infty} p_{pi} = \sum_0^{\infty} p_{ni} = 1$ si ottengono così N'_p ed N_n e quindi le probabilità cercate. I risultati di questo calcolo sono riportati nella tabella IV.

TABELLA IV.

i	$p_{pi}N'_p$	$p_{ni}N_n$	p_{pi}	p_{ni}	Numeri di stelle generate da protoni e neutroni con i contatori colpiti nella semicorona superiore (apparato di fig. 1 capovolto) e probabilità che una stella generata da un protone o da un neutrone abbia i rami all'indietro.
0	1987	2278	0,705	0,731	
1	554	554	0,195	0,179	
2	181	181	0,064	0,058	
3	72	72	0,025	0,023	
4	16	16	0,006	0,005	
5	13	13	0,005	0,004	
	(2823)	(3114)			

6. — Rapporto ϱ per stelle aventi almeno un ramo e distribuzione zenitale dei protoni generanti stelle senza rami rivelabili.

Note le p_{ni} , p_{pi} (paragrafo precedente), e dalla conoscenza del rapporto ϱ per le stelle *senza rami all'indietro* (§ 4), è possibile dedurre facilmente il rapporto ϱ per le stelle aventi almeno un ramo. Infatti i numeri di protoni e di neutroni che intervengono nel primo rapporto si ottengono da quelli che intervengono nel secondo, moltiplicandoli rispettivamente per p_{n0} e per p_{p0} . Quindi risulta

$$\varrho = \frac{0,705}{0,731} 1,67 = 1,61 \pm 0,08,$$

per le stelle con *almeno un ramo*.

Questo rapporto può anche essere dedotto utilizzando le misure eseguite con l'apparecchio capovolto. Infatti, detto N_{p_0} il numero delle stelle senza rami rivelabili generate dalla componente protonica, la differenza

$$(6) \quad N'_p - N_{p_0} = N_p$$

rappresenta il numero (da confrontare con N_n) dei protoni che generano stelle aventi *almeno un ramo*.

Sommando le (5) membro a membro e introducendo la (6) si ottiene

$$\sum_{i=1} n_i - N_{p_0} = N_p + N_n(1 - p_{n0}),$$

dalla quale, noto N_{p_0} , si ricava N_p e quindi il rapporto $\varrho = N_n/N_p$ relativo alle *stelle aventi almeno un ramo*.

Per determinare N_{p_0} si è applicato un procedimento di successive approssimazioni (su cui avremo occasione di ritornare con maggior dettaglio in un prossimo lavoro) il quale conduce al tempo stesso alla determinazione della legge di distribuzione zenitale dei protoni che generano stelle non aventi alcun ramo rivelabile. Sotto le ipotesi che: a) la distribuzione zenitale detta sia rappresentabile con una legge del tipo $\cos^m \zeta$; b) la distribuzione angolare rispetto alla verticale sia isotropa per le stelle ad un solo ramo generate da neutroni, dall'analisi dei 1009 eventi in cui non risulta colpito che un solo contatore della semicorona superiore (apparecchio di fig. 1 capovolto) si sono dedotti, con successive approssimazioni, l'esponente m ed il numero di rami all'indietro. Poichè quest'ultimo coincide con il numero di stelle generate da neutroni e non aventi che un solo ramo all'indietro, si ricava per differenza N_{p_0} .

Il valore così ottenuto per l'esponente m è 2,75; al tempo stesso si trova $N_{p_0} = 713$, $N_p = 2110$.

Si conclude che per le *stelle aventi almeno un ramo* il rapporto ϱ ha il valore

$\varrho = 1,48 \pm 0,05$, in accordo con il precedente. Il valor medio ponderato dei due valori:

$$(7) \quad \varrho = 1,53 \pm 0,04$$

è, come naturale, lievemente inferiore al valore (4) ottenuto per le stelle non aventi alcun ramo all'indietro (ed almeno un ramo in avanti).

7. - Distribuzione delle stelle a diverso numero di rami. Contributo degli sciami estesi.

Gli eventi registrati con l'apparecchio « diritto » (posizione di fig. 1) sono

stati classificati in base al numero di contatori colpiti. Introducendo le dovute correzioni con il metodo indicato nel § 3, è stata ottenuta la distribuzione rappresentata graficamente in fig. 3.

La ricrescita che si osserva per $r \geq 15$ si deve ascrivere al contributo degli sciami estesi. Infatti gli istogrammi di fig. 3 si riferiscono ad eventi (canale A dell'odoscopio, cfr. § 2) nei quali la perdita di energia per ionizzazione nel gas della camera è maggiore di ~ 7 MeV.

Osservando che per le particelle incidenti verticalmente il percorso medio dentro la camera è $\pi/4$ volte il diametro della medesima, (ossia alla pressione di 7,5 atmosfere circa $8 \cdot 10^{-2}$ g/cm² di Argon) si riconosce che occorrono circa 40 particelle relativistiche per produrre nel gas una ionizzazione glo-

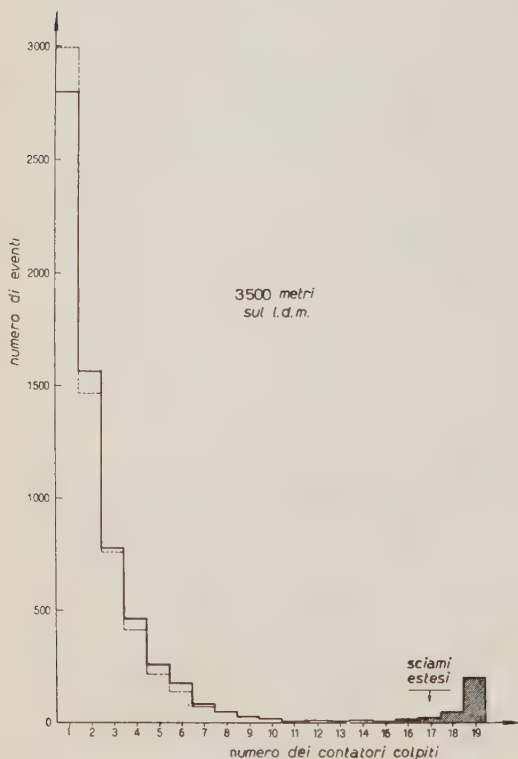


Fig. 3. - *Curva tratteggiata*: distribuzione (differenziale) del numero degli eventi registrati rispetto al numero dei contatori colpiti; *curva a tratto pieno*: è ottenuta dall'altra introducendo le correzioni per le probabilità che più di una particella attraversi lo stesso contatore.

bale di 7 MeV. Ciò corrisponde, per uno sciame che attraversi la camera, ad una densità di 1150 particelle/m² (7).

A 3500 m sul l.d.m. la frequenza degli sciame aventi una densità maggiore di questo valore risulta ⁽⁹⁾ ⁽¹⁰⁾, entro gli errori statistici, appunto eguale a quella da noi riscontrata ($0,37 \pm 0,02$ all'ora per gli eventi con $r \geq 15$).

Dai dati corrispondenti agli istogrammi di fig. 3 si possono dedurre le distribuzioni delle stelle prodotte da protoni e da neutroni rispetto al numero dei loro rami (secondari rivelabili con l'apparato). Per far questo conviene osservare che il numero N_{r+1} degli eventi in cui $r + 1$ contatori sono colpiti è uguale alla somma $N_{p,r}$ dei protoni che generano stelle a r rami e del numero di neutroni che producono stelle a $r + 1$ rami.

Quest'ultimo si può esprimere a sua volta mediante il numero $N_{p,r+1}$ di protoni e del rapporto ϱ relativo alle stelle ad $r + 1$ rami; si ha cioè:

$$(8) \quad N_{p,r} = N_{r+1} - \varrho N_{p,r+1}.$$

Noti i valori dei rapporti ϱ questa formula ricorrente consente di ricavare la distribuzione cercata.

Per stelle aventi almeno un ramo noi abbiamo usato i valori di ϱ ottenuti al § 4. Per stelle senza rami rivelabili abbiamo invece ricavato ϱ imponendo la condizione che dalla iterata applicazione della (8) risulti $N_{p,0} = 723$, in accordo con quanto ottenuto alla fine del paragrafo precedente e tenendo conto della lieve diversità tra i numeri globali di eventi registrati con l'apparecchio diritto (cui i dati qui discussi si riferiscono) e rispettivamente capovolto (dati del paragrafo precedente).

I risultati di questi calcoli sono riportati nella tabella V.

TABELLA V.

Numero di rami r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Stelle da protoni	723	978	437	313	127	109	51	38	23
Stelle da neutroni	(16590)	2054	562	313	127	109	51	38	23
Rapporto ϱ	22,9	2,1	1,3	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Numeri di protoni e di neutroni che generano le stelle con i numeri di rami indicati nella prima linea.

(7) Allo stesso risultato si perviene utilizzando la formula data da WILLIAMS ⁽⁸⁾ e introducendo le costanti della nostra camera.

(8) R. W. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **74**, 1689 (1948).

(9) E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 401 (1950).

(10) G. FORNACA e G. MARTELLI (in corso di pubblicazione).

8. — Rapporto ϱ per le stelle senza rami rivelabili.

Il numero $N_{n,0}$ di stelle senza rami rivelabili prodotte da neutroni può essere dedotto dagli eventi registrati dai circuiti di numerazione N_A , N_B , N_C (v. § 2). Limitandoci per il momento a considerare i soli eventi registrati da N_A (per i quali, come si è detto, la perdita di energia nella camera è maggiore di circa 7 MeV) il loro numero n_A è dato da

$$n_A = N_{n,0} + C,$$

avendo indicato con C il numero totale di coincidenze tra gli impulsi della camera (maggiori di $1,3V_\alpha$) e quelli dei contatori ⁽¹¹⁾.

Poichè alle 6509 coincidenze registrate durante l'esecuzione delle misure con l'apparato diritto corrispondono circa 23100 eventi registrati contemporaneamente da N_A , risulta $N_{n,0} = 16590$ e corrispondentemente (tabella V)

$$(9) \quad \varrho_0 = N_{n,0}/N_{v,0} = 22,9 \pm 0,4.$$

Prendendo ora in considerazione separatamente gli eventi registrati dai canali B , C e da N_B , N_C si può mostrare che per le stelle senza rami rivelabili non esiste alcuna relazione tra l'energia ε dissipata per ionizzazione nel gas della camera e l'energia E del corrispondente evento. Infatti i valori di ϱ_0 che si deducono dalle nostre misure utilizzando gli eventi registrati dai tre canali N_A , N_B , N_C , risultano indipendenti da V_α (e quindi da ε) e tutti uguali, entro gli errori statistici (minori del 5%), al valore (9). Se, invece, ε desse una qualche misura di E , allora il rapporto ϱ dovrebbe diminuire al crescere di ε , così come esso diminuisce al crescere del numero dei rami delle stelle (§ 4) cioè al crescere dell'energia media della componente nucleonica.

9. — Discussione.

A) Nelle considerazioni svolte nei paragrafi precedenti si è ammesso implicitamente che, al di fuori del contributo degli sciami estesi (importante, come si è visto, solo nel caso in cui siano colpiti simultaneamente almeno 15 contatori) gli eventi da noi registrati siano dovuti effettivamente alle interazioni nucleari che hanno luogo nella camera.

⁽¹¹⁾ C rappresenta la somma di tutte le stelle prodotte da protoni e delle stelle con almeno un ramo rivelabile generate da neutroni. Naturalmente sempre con la condizione che almeno 7 MeV vengano dissipati nel gas della camera. Alla quota di osservazione l'intensità degli eventi C risulta $\sim 7/\text{hr}$.

Quest'ipotesi appare legittima perchè: *a)* i protoni di bassa energia sono prevalentemente verticali (v. § 6) e dalla relazione tra percorso ed energia risulta che un protone verticale frenato nel gas della camera perde per ionizzazione un'energia comunque minore di 7 MeV; *b)* a 3500 m sul l.d.m. la frazione di altre particelle ionizzanti pesanti può essere trascurata; *c)* altri tipi di particelle elementari frenate nel gas, perdono per ionizzazione un'energia minore di quella dei protoni.

Circa la natura dei *rami* rivelabili con l'apparato (i quali, come si è detto nel § 3, corrispondono alle tracce grigie e sottili prodotte nelle emulsioni fotografiche da protoni e da mesoni) possiamo escludere a priori che una percentuale rilevante dei rami stessi possa essere costituita da particelle α (o da frammenti nucleari). Una particella α , infatti, deve avere un'energia maggiore di circa 100 MeV per penetrare le pareti della camera e dei contatori, e dalle osservazioni con le lastre fotografiche ⁽¹²⁾ ⁽¹³⁾ risulta che assai raramente viene emessa in un'interazione nucleare una particelle di energia maggiore di 100 MeV.

Possiamo perciò praticamente concludere (v. anche BUSCHMANN *et al.* ⁽¹⁾) che:

1) gli eventi da noi osservati implicano interazioni nucleari causate dalla componente nucleonica nel gas ($\sim 15\%$) e nelle pareti ($\sim 85\%$) della camera;

2) le particelle emesse in queste interazioni nucleari e rivelate dal nostro apparato sono protoni di energia maggiore di ~ 25 MeV e mesoni di energia maggiore di ~ 10 MeV.

B) Discuteremo ora brevemente il risultato ottenuto al § 8 sul rapporto ϱ_0 .

L'energia media che possiede un nucleone che produce una stella senza rami secondari rivelabili risulta, da un calcolo approssimativo, pari a 35 MeV. Questo valore è stato ottenuto: *a)* assumendo per i nucleoni uno spettro in energia del tipo $dE/E^{2.5}$ ⁽¹²⁾; *b)* tenendo conto del fatto che solo il 15% delle stelle sono prodotte nel gas e che, per una stella di data energia generata nelle pareti della camera, la probabilità di rivelazione dipende dal punto in cui essa è generata; *c)* valutando l'energia massima dei nucleoni responsabili di questa classe di stelle, in base al fatto che il loro numero medio di tracce nere è ~ 5 ⁽¹²⁾ e sotto l'ipotesi che venga in media emesso un ugual numero di neutroni ⁽¹⁴⁾.

Il fatto che il rapporto ϱ_0 sia diverso dall'unità può dipendere da tre cause

⁽¹²⁾ J. G. WILSON: *Progress in Cosmic Ray Physics* (Amsterdam, 1952), cap. I.

⁽¹³⁾ G. CORTINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 470 (1949).

⁽¹⁴⁾ Non occorre comunque conoscere con grande precisione il valore massimo dell'energia del nucleone: il numero dei nucleoni decresce infatti rapidamente con la loro energia.

distinte: 1) dalle perdite di energia per ionizzazione subite dai protoni attraversando l'atmosfera; 2) dallo scambio di carica dei nucleoni durante le interazioni che hanno luogo con i nuclei di aria; 3) da una eventuale differenza tra le sezioni d'urto per produzione di stelle per i due tipi di nucleoni.

La prima di queste cause diviene importante ad energie inferiori a quella (~ 400 MeV) in corrispondenza della quale il cammino libero medio per interazione nucleare risulta confrontabile col « range » dei protoni nell'aria ⁽¹⁵⁾ ⁽¹⁶⁾.

Se la terza causa fosse trascurabile il rapporto ϱ da noi misurato dovrebbe fornire direttamente il rapporto N/P tra i numeri di neutroni e di protoni responsabili delle stelle osservate. Questo ultimo rapporto, tenendo conto soltanto delle prime due cause, può essere approssimativamente espresso, secondo PUPPI e DALLAPORTA ⁽¹⁷⁾, dalla formula:

$$(10) \quad \frac{N}{P} = W^2 / (W^2 - Mc^2),$$

dove W e Mc^2 rappresentano rispettivamente l'energia totale e di riposo dei nucleoni.

Per un'energia cinetica $E = W - Mc^2$ di 35 MeV, quale quella media da noi calcolata nel caso delle stelle senza rami rivelabili, la (10) fornisce $N/P = 14$, mentre il valore sperimentale (9) di ϱ è $\sim 1,65$ volte maggiore.

Per spiegare la diversità tra i due valori si è indotti a far intervenire la terza delle cause sopra elencate. Invero, anche se si ammette che una volta penetrati nel nucleo un protone ed un neutrone abbiano la stessa probabilità di interazione, alle energie in giuoco è ben sensibile per i protoni l'effetto della barriera coulombiana. Per un nucleo avente $Z = 28$, $A = 60$ (sono questi i valori che si ottengono facendo una media ponderata tra i nuclei del gas e delle pareti della camera) si può calcolare il coefficiente di trasmissione relativo ai protoni di 35 MeV ⁽¹⁸⁾.

Il risultato di questo calcolo è compatibile con l'ipotesi che la diversità tra i valori di ϱ_0 e di N/P si possa interamente ascrivere all'effetto della barriera coulombiana.

C) Partendo dallo spettro primario dato da WINCKLER *et al.* ⁽¹⁹⁾, CLEMENTEL e FERRARI hanno calcolato per energie $E > 400$ MeV gli spettri

⁽¹⁵⁾ B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **6**, 309 (1949).

⁽¹⁶⁾ P. BUDINI e N. DALLAPORTA: *Nuovo Cimento*, **7**, 230 (1950).

⁽¹⁷⁾ J. G. WILSON: loc. cit., cap. VI.

⁽¹⁸⁾ J. M. BLATT e V. F. WEISSKOPF: *Theoretical Nuclear Physics*, (New York, 1952), cap. VI.

⁽¹⁹⁾ J. R. WINCKLER, T. STIX, K. DWIGHT e R. SABIN: *Phys. Rev.*, **79**, 656 (1950).

energetici dei protoni e dei neutroni a varie quote, nonchè la variazione del rapporto N/P con E ⁽²⁰⁾.

Per i protoni di 400 MeV ed alla quota di 3500 m sul l.d.m. essi trovano $N/P = 2,1$.

Questo valore è uguale al valore di ϱ riportato in tabella V per le stelle aventi soltanto un ramo. Ammettendo che a queste energie N/P e ϱ si debbano considerare uguali (l'effetto della barriera coulombiana infatti non ha importanza ad energie così elevate), noi concludiamo che la radiazione nucleonica responsabile delle stelle con un solo ramo ha un'energia media di circa 400 MeV; cioè ~ 11 volte maggiore dell'energia media della radiazione che genera le stelle senza rami.

Per spingere più a fondo il confronto dei nostri risultati sperimentali con i calcoli di CLEMENTEL e FERRARI, abbiamo valutato il valor medio, ponderato sugli spettri dati da questi autori, del rapporto N/P relativo a nucleoni di energia maggiore di 400 MeV. Per far questo abbiamo ammesso che la dipendenza di ϱ dall'energia E dei nucleoni si possa esprimere mediante la relazione:

$$(11) \quad \varrho = a + bE^{-n},$$

ed abbiamo determinato le costanti a , b , n , in modo che la (11) rappresenti bene l'andamento della curva teorica $\varrho(E)$ di CLEMENTEL e FERRARI.

Allora risulta

$$\bar{\varrho} = \frac{\int_{E_m}^{\infty} \varrho(E) f(E) dE}{\int_{E_m}^{\infty} f(E) dE} = a + \frac{2b}{n+2} E_m^{-n},$$

dato che lo spettro differenziale dei nucleoni si può rappresentare approssimativamente con $f(E) = KE^{-3}$. Per $E_m = 400$ MeV si trova in tal modo $\bar{\varrho} = 1,65$, in buon accordo con il valore sperimentale (7), del § 6.

Notiamo che $\varrho \rightarrow a < 1$ quando $E \rightarrow \infty$. Si è controllato però che scegliendo ad arbitrio a nell'intervallo $0 < a < 1$ e determinando b ed n in modo che per due prescelti valori di E la (11) fornisca i due corrispondenti valori teorici, si ottiene sempre per ϱ un valore prossimo ad 1,65.

La dipendenza del valore del rapporto N/P dalla energia e dalla quota è stata calcolata anche da MESSEL ⁽²¹⁾ per varie latitudini.

⁽²⁰⁾ E. CLEMENTEL e F. FERRARI: *Nuovo Cimento*, **9**, 572 (1952).

⁽²¹⁾ H. MESSEL: *Phys. Rev.*, **83**, 26 (1951).

Il valore di N/P deducibile da questo lavoro, in corrispondenza della quota e della latitudine a cui sono state eseguite le nostre misure, risulta, per nucleoni di energia maggiore di 0,5 GeV in ottimo accordo con il nostro risultato. Peraltro, secondo questo autore, il rapporto N/P varia più lentamente con l'energia dei nucleoni, di quanto non appaia dalla nostra esperienza.

Esprimiamo la nostra sincera gratitudine al sig. VINICIO LENZI per la sua attiva collaborazione nella preparazione e messa a punto dell'apparato sperimentale e nella esecuzione delle misure al L.T.G.

Uno di noi (P. R.) desidera inoltre ringraziare vivamente, nella persona del prof. GUIDO CALOGERO, l'Istituto Italiano di Cultura a Londra per l'assegnazione di una borsa di studio messa a disposizione dal Governo Italiano.

SUMMARY

A fast, thin-walled ionization chamber, surrounded with G.M. counters connected to a 22 channel-hodoscope, has been used to investigate some properties of the nucleonic component present at 3500 m above sea level. The picture of each nuclear interaction taking place in the chamber and in which prongs are emitted which cross the counters, is recorded by a typewriter triggered by the hodoscope. These «detectable prongs» are shown to correspond to the «grey tracks» and «shower particles» observed in photographic emulsions. Some results of the analysis of more than 13000 stars are reported. 1) The ratio ρ of stars produced by neutrons to stars produced by protons is determined for stars with different numbers of detectable prongs. In particular it is found $\rho = 23 \pm 0.4$ for stars with «no prongs» (which are shown to be produced by nucleons of average energy $E = 35$ MeV) while $\rho = 1.53 \pm 0.04$ for stars with at least one prong ($E > \sim 400$ MeV). 2) It is shown that the high value of ρ for stars of $\bar{E} = 35$ MeV cannot be interpreted only in terms of charge exchange and ionization losses undergone by protons through the atmosphere, but it is explained if the Coulomb barrier of the interacting nuclei is also considered. 3) The probabilities to produce a star with a given number of «back-ward» prongs are deduced for both neutrons and proton primaries (see Table IV). $\sim 30\%$ of stars with at least one «detectable prong» have at least one backward prong. 4) The zenith angle distribution of protons of $\bar{E} = 35$ MeV is found to fit a \cos^2 law. 5) The differential distribution of stars with respect to the number of detectable prongs is given for both proton and neutron formed stars (see Table V). 6) Good agreement is shown to exist between our results and the phenomenological theories of the nucleonic component.

Determinazione sperimentale dell'intensità totale del campo magnetico terrestre nella regione inferiore dell'alta atmosfera (strato E).

M. CUTOLO

Istituto di Fisica Tecnica dell'Università, Centro di Studi di Radiopropagazione - Napoli

(ricevuto il 27 Aprile 1953)

Riassunto. — Si mette brevemente in rilievo l'importanza dello studio del campo magnetico terrestre (C.M.T.) e si ricorda come la maggiore causa di variazione di esso sia dovuta alle correnti elettriche aventi sede nella regione inferiore della ionosfera e cioè nello strato E. Dopo aver menzionato che il metodo di Appleton per la misura del C.M.T. sia adatto soltanto per lo strato F e non per lo strato E in quanto in questo strato la birifrangenza elettromagnetica non è affatto netta, si dimostra quanto sarebbe importante escogitare un metodo capace di misurare il C.M.T. proprio nello strato E per poi paragonare il valore trovato in quella regione con quello misurato sulla superficie terrestre sotto la zona esplorata della ionosfera. Si mette in evidenza come il metodo della girointerazione permette di risolvere il problema della misura del C.M.T. nello strato E e come tale metodo sia idoneo, qualora si adoperi una giostazione funzionante in regime impulsivo, a fare misure precise con incertezza soltanto sulla 4^a cifra decimale. Se poi si adopera il fenomeno dell'autodemodulazione, il metodo di misura riesce più semplice pur rimanendo la precisione identica a quella del metodo della girointerazione. Si conclude con l'osservare che i metodi descritti indicano che il valore del C.M.T. in quota è più piccolo di quello riscontrato sulla superficie terrestre. Questa diminuzione e le fluttuazioni del campo magnetico sembrano provare l'esistenza delle correnti elettriche nello strato E.

Premessa.

Lo studio del campo magnetico terrestre (C.M.T.) va assumendo di giorno in giorno sempre maggiore interesse e maggiori sviluppi. Mentre da un lato il C.M.T. o meglio le sue variazioni hanno notevoli azioni su le radiocomunicazioni e su la radiazione cosmica, dall'altro lo studio del C.M.T. permette di poter seguire l'attività solare, il che contribuisce notevolmente non solo a

meglio conoscere i fenomeni solari ma anche ad approfondire le cause che producono il campo magnetico terrestre.

Da una quindicina di anni gli studi hanno permesso di assodare che le variazioni diurne del C.M.T. hanno per la maggior parte origine esterna alla Terra. Esse sarebbero dovute alla presenza di correnti elettriche generate dal Sole nella ionosfera e precisamente nello strato E, cioè ad un'altezza intorno ai 90 km dalla superficie terrestre.

Dato il notevole interesse che presenta lo studio del C.M.T. e delle sue variazioni, si vede come sarebbe importante tentare di escogitare un metodo sperimentale che permettesse di determinare con sufficiente approssimazione l'intensità totale H del C.M.T. appunto nello strato E e di paragonare tale valore con quello misurato sulla superficie terrestre giacente sotto la zona esplorata dello strato E.

Com'è noto esiste già un metodo per la determinazione del C.M.T. nella ionosfera, ed è il metodo di Appleton il quale determina H dalla conoscenza delle rispettive frequenze critiche f_o ed f_s dei raggi ordinario e straordinario nei quali si suddivide un'onda durante il suo passaggio nella ionosfera ⁽¹⁾.

Quando si vuole determinare H nello strato E mediante le formule di Appleton queste non sono più valide perchè l'intensità del raggio straordinario prodotto nello strato E è così assorbito da non potersi captare sulla Terra e di conseguenza non se ne può determinare la frequenza critica f_s .

Lo scopo del presente lavoro è appunto quello di dimostrare come sia invece possibile ricavare H nello strato E applicando il fenomeno della girointerazione. Se poi si utilizza invece il fenomeno dell'autogirointerazione, fenomeno messo in luce dall'Autore, la possibilità di determinare H diventa più facile mentre la precisione della misura rimane identica a quella che si ottiene con la girointerazione.

1. — Il metodo della girointerazione.

In due lavori precedentemente pubblicati ⁽²⁾ è stato messo in luce come una delle conseguenze più interessanti del fenomeno della girointerazione è rappresentata dalla possibilità di misurare l'intensità totale del campo magnetico terrestre proprio nello strato E. Il metodo della girointerazione consiste pertanto nel far variare intorno alla frequenza giromagnetica locale f_r la frequenza di una stazione emittente (con onda modulata per es. all'80%) detta girostazione sita in una determinata località (p. es. Firenze), e di cogliere nella stazione ricevente (p. es. Torino) l'istante in cui l'effetto di giro-

⁽¹⁾ S. K. MITRA: *The Upper Atmosphere*, 2ª ediz. (Calcutta), p. 233.

⁽²⁾ M. CUTOLO, M. CARLEVARO, M. GHERGHI: *Alta Freq.*, **15**, 111 (1946); M. CUTOLO: *Ric. Scient.*, **16**, 1835 (1946).

interazione ha la massima intensità, cioè è massimo il percento di modulazione impressa sull'onda non modulata (ricercata) irradiata p. es. a Taranto. Conoscendo la frequenza della girostazione che ha prodotto tale massimo d'intensità si conosce subito la frequenza giromagnetica (le due frequenze sono uguali per il fenomeno della risonanza) e da qui H , essendo l'intensità totale del C.M.T. legata alla frequenza giromagnetica dalla ben nota espressione:

$$(1) \quad fr = \frac{eH}{2\pi mc}$$

dove e ed m sono le costanti elettroniche.

Com'è noto V. A. BAILEY ha dimostrato ⁽³⁾ e ⁽⁴⁾ che a seconda della penetrazione dell'onda nello strato E si può ottenere o una curva di risonanza con un massimo il cui apice è distante pochi percento dalla girofrequenza, oppure una curva con due massimi i cui apici sono perfettamente simmetrici rispetto alla frequenza giromagnetica.

Dall'esame del diagramma di Bailey ⁽³⁾ scaturisce chiaramente che per ottenere valori esatti di f_r e quindi di H è necessario ottenere la curva a due massimi.

L'esistenza di questa curva è stata comprovata nel 1949 dall'Autore e collaboratori ⁽⁵⁾ e assai recentemente da V. A. BAILEY e collaboratori in Australia ⁽⁶⁾.

Fortunatamente le esperienze hanno dimostrato che è relativamente più facile avere la curva a due massimi di quella a un massimo.

La fig. 1 dà un esempio di una curva di risonanza a due massimi ottenuta durante la notte del 13 luglio 1949. Esaminando la figura si vedono chiaramente i due massimi della curva. L'escursione della lunghezza d'onda della girostazione andava da $\lambda = 220$ m a $\lambda = 280$ m. La curva a rappresenta una seconda escursione fatta dalla girostazione dopo circa un'ora dall'escursione compiuta per ottenere la curva b . Il massimo inferiore della curva b è sito in corrispondenza della lunghezza d'onda di m 231,50, mentre il massimo superiore si trovava su $\lambda = 273,80$ m. Poichè i due massimi sono perfettamente simmetrici rispetto alla girofrequenza si ha che quest'ultima è data dalla media delle due frequenze su cui sono siti i due massimi e cioè $f_r = 1187,41 \times 10^3$ Hz. Infatti $(231,50 + 273,80)/2 = 252,65$ m. A questa lunghezza d'onda corrisponde

⁽³⁾ V. A. BAILEY: *Phil. Mag.*, **26**, 425 (1938).

⁽⁴⁾ M. CUTOLO: *Il Nuovo Cimento*, **9**, 392 (1952).

⁽⁵⁾ M. CUTOLO: *Nature*, **166**, 68 (1950); M. CUTOLO, R. FERRERO e M. MOTZO: *Alta Freq.*, **19**, 4 (1950); M. CUTOLO: *Nuovo Cimento*, **9**, 688 (1952).

⁽⁶⁾ V. A. BAILEY, R. A. SMITH, K. LANDECKER, A. J. HIGGS e F. H. HIBBERD: *Nature*, **169**, 911 (1952).

appunto la frequenza di $1187,41 \times 10^3$ Hz. Sostituendo questi due valori di f_r nella formula (1) si ha che $H = 0,42349$ oersted. L'apice della curva a si trova spostato di pochissimo da quello della curva b e cioè all'incirca di 25 cm. Analogamente si sarà spostato l'apice del massimo superiore che dovrebbe corrispondere alla curva a (non segnato nella fig. 1). Pertanto la variazione della frequenza giromagnetica è molto piccola rispetto al valore che si ottiene adoperando la curva b e di conseguenza il valore di H è diverso soltanto per la 3^a cifra decimale.

Esaminando la tabella I si nota che un errore di 12,5 cm nell'apprezzare ciascun massimo e quindi di 25 cm nella determinazione della lunghezza d'onda

TABELLA I.

Lunghezze d'onda medie	Frequenza giromagnetica sperimentale	H (oersted)
252,00	$1190,47 \cdot 10^3$ Hz	0,424587
252,25	$1189,29 \cdot 10^3$ Hz	0,424167
252,525	$1188,00 \cdot 10^3$ Hz	0,423708
252,545	$1187,90 \cdot 10^3$ Hz	0,423663
252,775	$1186,82 \cdot 10^3$ Hz	0,423285

corrispondente alla girofrequenza porta ad una variazione di H soltanto nella 4^a cifra decimale e precisamente di 4 decimillesimi di oersted. Se invece si cerca di limitare, il che è possibile, l'errore soltanto a un sol cm per ciascun massimo e cioè di 2 cm per la lunghezza d'onda media, si ha una variazione della 4^a cifra decimale soltanto di una unità per cui l'errore è soltanto un decimillesimo.

Per calcolare adesso il valore teorico della frequenza giromagnetica della zona del cielo da noi esplorata (in questo caso il cielo di Montefalco, Foligno) basta adoperare la formula di Schmidt:

$$H = H_0 \left(1 - \frac{3h}{R} \right),$$

dove H è l'intensità totale del C.M.T. all'altezza considerata (90 km), H_0 , l'intensità del C.M.T. alla superficie terrestre sottostante alla zona ionosferica esplorata, h l'altezza dalla superficie terrestre ed R il raggio della terra. Poichè H_0 (riferito al luglio 1949, epoca in cui si fecero le esperienze) è di 0,4477 oersted, ed R è ~ 6370 km si ha che $H \sim 0,4287$ oersted. Sostituendo questo valore nella (1) si ha che la frequenza giromagnetica teorica del cielo di Montefalco,

a 90 km di altezza e nel luglio 1949 corrispondeva a circa 1200 kHz. Confrontando il valore teorico di f_r cioè 1187,41 kHz con quello ricavato sperimentalmente si nota una certa differenza anche se questa è piccola. I valori di H sono pertanto i seguenti: $H_{\text{teorico}} \cong 0,4287$; $H_{\text{esprim.}} = 0,42349$.

È opportuno subito aggiungere che quello sperimentale è certamente il valore più probabile da assumere per H in quanto la formula di Schmidt è approssimata. Evidentemente se si effettuassero di tempo in tempo delle escursioni di frequenza portante della giostazione sarebbe possibile seguire le eventuali variazioni notturne del C.M.T.

Il confronto tra le variazioni di H nella ionosfera esplorata darebbe notevoli informazioni sulla natura stessa delle variazioni e sull'origine del C.M.T.

Confrontando ora il valore di H_0 misurato sulla terra e quello H ottenuto a 90 km di altezza si nota che quest'ultimo è più piccolo del valore di H sulla terra. Ciò è in perfetto accordo con quanto prevede l'ipotesi e la formula magnetica di Schmidt.

È opportuno ora esaminare il grado di precisione che di offre il metodo di misura sopra descritto. La variazione di potenza irradiata che si ha nel cambiamento di frequenza della portante della giostazione per andare da 220 a 280 m non ha alcuna sensibile influenza su la formazione dei massimi in quanto l'accordo dell'aereo per ciascuna frequenza emessa fa sì che la distribuzione di potenza sia quasi la stessa per tutta la gamma di frequenze irradiate. Nel caso della curva di fig. 1 la variazione di potenza era in tutto di 300 W mentre la potenza media irradiata era di 3300 W. Se si tiene conto di questi 300 W nella formula di BAILEY ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ adatta per calcolare il lavoro medio fatto dal campo elettrico dell'onda sull'elettrone fra due urti consecutivi con le molecole neutre, si vede che il lavoro è praticamente lo stesso.

Se si adopera un pannello trasmettente di 3 o 4 kW di potenza irradiata come ha fatto l'Autore (caso di radio Firenze II) è possibile variare la lunghezza d'onda perfino di cm in cm. Da qui si vede come sia possibile determinare con elevata precisione gli apici dei due massimi della curva di risonanza.

È opportuno tuttavia osservare che l'adozione di un pannello trasmettente di soli 3, 4, 5 kW non è affatto ideale perchè è molto difficile con tale potenza

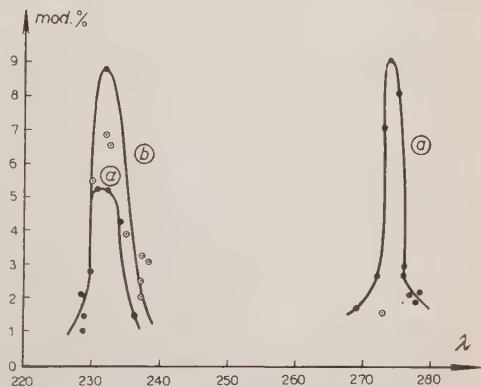


Fig. 1.

costruire la curva di risonanza nel caso di ionosfera disturbata, come è stato dimostrato dalle esperienze dell'Autore ⁽⁵⁾. Per poter quindi effettuare continuamente delle misure sia in condizioni ionosferiche di tranquillità che in quelle di agitazione occorrerebbe un pannello di potenza molto più elevata il che però impedirebbe, come è noto, di poter variare la lunghezza d'onda di cm in cm.

Per risolvere in modo conveniente il problema è necessario quindi adottare il metodo degli impulsi il quale ha il notevole vantaggio, come ha dimostrato per la prima volta l'Autore ⁽⁷⁾ di esaltare notevolmente il fenomeno della girointerazione pur emettendo potenze medie di qualche centinaio di W.

L'adozione di un autooscillatore a impulsi della potenza di cresta di una quarantina di kW è della durata di impulso di 1 millisecondo (tale durata è necessaria per vincere l'inerzia dell'elettrone) permette di poter ottenere risultati precisi. Il campo elettromagnetico non modulato può avere una potenza anche di un kW; la sua lunghezza d'onda dipende dalla distanza della stazione che lo emette (ricercata) dal posto ricevente dove si effettuano le misure secondo la tabella II.

TABELLA II.

Distanza tra ricercata e ricevente (in km)	Lunghezza d'onda della ricercata (in metri)
400	2 000 ÷ 1 500
600	1 200 ÷ 900
900	~ 600
1 200	600 ÷ 500

La stazione ricevente di misura deve essere costituita da un buon radio-ricevitore per onde medie e lunghe, notevolmente selettivo, con basso rumore di fondo, alla cui uscita in B.F. è collegato un oscillografo provvisto di una scala graduata per es. in cm. Su questo schermo saranno ben visibili gli impulsi impressi di cui si determinerà volta per volta l'ampiezza corrispondente a una determinata frequenza emessa dalla girostazione. Il luogo dei punti corrispondenti a ciascuna ampiezza misurata costituirà in un diagramma la cui ordinata è espressa in cm, e la cui ascissa rappresenta la lunghezza d'onda della girostazione, la curva di risonanza desiderata. Il tempo occorrente per costruire una curva di risonanza a due massimi è dell'ordine di una decina di minuti e forse meno se si adotta il metodo degli impulsi.

(7) M. CUTOLO: *Nature*, **160**, 834 (1947); *Nuovo Cimento*, **5**, 475 (1948).

2. - Il metodo dell'autointerazione (o autogirodemodulazione).

Un metodo ugualmente preciso ma ancora più semplice del precedente è quello che si basa sul fenomeno dell'autointerazione recentemente scoperto ⁽⁸⁾. Come è noto il fenomeno consiste nella demodulazione che subisce quando attraversa una zona della ionosfera un campo elettromagnetico modulato costantemente (per es. a 200 Hz e a 80%) la cui frequenza portante varia di alcuni percento intorno alla frequenza giromagnetica locale. Le esperienze

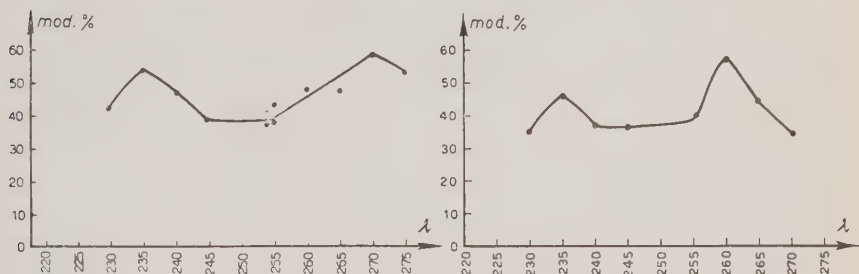


Fig. 2. - Esempi di curve di autodemodulazione ottenute la prima il 7-VI-1950 e la seconda il 30-VI-1951. La frequenza di modulazione era per entrambe 230 Hz.

hanno dimostrato chiaramente che il massimo del fenomeno si ha sulla frequenza giromagnetica. L'azione è dovuta pertanto al campo magnetico terrestre.

L'esperienza ha mostrato che facendo variare la frequenza di un campo elettromagnetico intorno alla girofrequenza locale si ottiene una curva di risonanza invertita con due massimi simmetrici rispetto alla girofrequenza.

La fig. 2 dà un esempio delle curve che si sono ottenute durante alcuni cicli di esperienze. In tali cicli il campo elettromagnetico modulato era emesso a Firenze (R.A.I.) mentre l'apparecchiatura ricevente di misura della demodulazione era sita a Torino (Istituto Elettrotecnico Nazionale) o a Napoli. Esaminando la figura si vedono ben distinti i due massimi della curva di demodulazione. Essi corrispondono alle lunghezze d'onda 235 m e 270 m, e cioè essi giacciono all'incirca sulle lunghezze d'onda dei massimi della curva di risonanza della girointerazione il che è giustificato dalla teoria dell'interazione come sarà mostrato in un successivo lavoro.

Pertanto la lunghezza d'onda media è di 252,5 m, corrispondente alla fre-

⁽⁸⁾ M. CUTOLO: *Nature*, **167**, 314 (1951); *Nuovo Cimento*, **9**, 688 (1952).

quenza di $1188,11 \times 10^3$ Hz. Poichè questa frequenza è eguale alla frequenza giromagnetica, servendosi della formula (1) si ottiene che $H = 0,423747$ oersted.

Questo valore di H coincide esattamente con quello determinato col metodo della girointerazione a meno della 4^a cifra decimale.

Bisogna tuttavia osservare che il valore di H trovato con il metodo della girointerazione si riferisce al cielo di Montefalco e al 13 luglio 1949, mentre il valore di H avuto con l'autointerazione è stato trovato la notte del 7 giugno 1950 ed è probabilmente riferito al punto del cielo di lat. $49^\circ 25'$ e long. $9^\circ 27'$ sito a metà strada tra Firenze e Torino.

Per quanto riguarda il grado di precisione di misura valgono esattamente le stesse considerazioni fatte nel caso del metodo della girointerazione.

Poichè con l'autodemodulazione è sufficiente una stazione tra i 3 e i 5 kW di potenza si può variare la frequenza portante intorno ai massimi anche di cm in cm, per cui l'incertezza della misura di H è soltanto sulla 4^a cifra decimale.

Per effettuare la misura occorre oltre la stazione (modulata per es. a 200 Hz e all'80%) la cui frequenza varia intorno alla girofrequenza (per es. da 220 m a 280 m), un'apparecchiatura di misura sita in una località distante dalla trasmittente almeno di 200 km e ciò per evitare l'influenza del raggio superficiale.

L'apparecchiatura di misura deve essere costituita da un buon radiorecettore, capace di seguire le variazioni di frequenza del trasmettitore, e da un oscillografo inserito sulla 2^a media frequenza del ricevitore. Sullo schermo dell'oscillografo sarà così visibile l'involuppo del campo elettromagnetico modulato in arrivo, come indica la fig. 3). Per ricavare il percento di modulazione basta leggere le dimensioni del massimo a , e del minimo b , e applicare

la formula $\frac{a-b}{a+b} \times 100$. L'escursione di tutta la gamma di lunghezze d'onda esplorata dal pannello trasmittente ($220 \div 280$ m) può essere eseguita anche

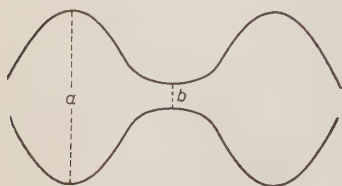


Fig. 3.

in una decina di minuti in modo che la durata di ciascuna lunghezza d'onda emessa sia di una trentina di secondi. Se noi adottiamo una macchina cinematografica per riprendere gli oscillogrammi, è conveniente eseguire numerosi fotogrammi per ciascuna frequenza emessa. La media dei percento di modulazione corrispondenti alla serie di fotogrammi ripresi per quella determinata

frequenza irradiata, costituisce il valore più probabile del grado di modulazione del segnale captato alla stazione ricevente. Infine se si mettono in curva i vari percenti medi della modulazione ricevuta si ottiene un diagramma (ascisse le lunghezze d'onda oppure le frequenze emesse, ordinate i gradi di modulazione) che rappresenta una curva del tipo di fig. 2). La determinazione esatta delle lunghezze d'onda (oppure delle frequenze) corrispondenti ai due massimi, ci

permette di ricavare la girofrequenza e quindi l'intensità totale del C.M.T. nello strato E.

La tabella III riporta alcuni valori di H misurati con i due metodi descritti sopra.

TABELLA III.

Data	Metodo adoperato	Località della girostaz.	Località ricevente	Cielo a cui si riferisce il valore di H	H (oersted)
3-7-49	girointerazione	Firenze	Torino	Montefalco	0,433623
6-7-49	girointerazione	Firenze	Torino	Montefalco	0,431436
13-7-49	girointerazione	Firenze	Torino	Montefalco	0,423749
7-6-50	autointerazione	Firenze	Torino	= 49° 25'; = 9° 27';	0,423747
23-7-50	autointerazione	Firenze	Napoli	= 42° 18'; = 12° 54';	0,429771
29-7-50	autointerazione	Firenze	Napoli	= 42° 18'; = 12° 54'.	0,443145 *
30-6-51	autointerazione	Firenze	Torino	Montefalco	0,432309

* Questo valore è dubbio perchè c'è incertezza nella lettura del massimo inferiore.

Conclusione.

Da quanto si è descritto sopra traspare chiaramente l'importanza dei metodiⁱ della girointerazione e dell'autogirointerazione, sostanzialmente diversi tra di loro, per la risoluzione della determinazione sperimentale di H nella regione inferiore dell'alta atmosfera dove, come è noto, è impossibile applicare il metodo di Appleton, causa la difficoltà di avere un netto fenomeno di birifrangenza.

La bontà dei due metodi è ancora più notevole quando si constata che è possibile approssimare la misura di H sino alla 4^a cifra decimale. Se poi si considera che il metodo dell'autogirodemodulazione è il più semplice dei due nonostante la sua elevata precisione, si può concludere che il fenomeno può apportare un notevole contributo allo studio delle variazioni e dell'origine del C.M.T.

Una conclusione notevole alla quale si può giungere esaminando la tabella III, è che H nello strato E è inferiore al valore che esso ha sulla terra nella zona sottostante al cielo esplorato.

Inoltre se noi esaminiamo le varie curve di risonanza ottenute con la girointerazione oppure con l'autogirodemodulazione, durante varie escursioni della frequenza portante irradiata, escursioni effettuate o durante una stessa notte

o in notti successive, si vede chiaramente (vedi lavori ⁽⁵⁾, ⁽⁸⁾) come i massimi subiscono vari spostamenti dalle lunghezze d'onda abituali sui quali si trovano, il che conduce a una variazione della frequenza giromagnetica locale. Ricordando la (1) si deduce che l'unica causa che produce questa variazione sono le oscillazioni del C.M.T. a quell'altezza.

Di qui si conclude che i metodi sopra illustrati sono perfettamente idonei per registrare le fluttuazioni del C.M.T. e di comprovare l'esistenza delle correnti elettriche nella ionosfera.

Noi ci proponiamo di effettuare una serie di misure per poter seguire le variazioni del C.M.T. nella ionosfera per poi paragonarle a quelle eventuali registrate sulla terra.

L'esistenza di una notevole risonanza dovuta al C.M.T. risulta dall'esperienza descritta qui ed altrove. Si vede allora evidente che nel caso di risonanza le orbite degli elettroni dovranno notevolmente ingrandirsi e ciò in perfetto accordo con la teoria magnetoionica di Appleton, Barnett, Nichols e di Shelling.

La scoperta dei fenomeni di girointerazione e autogirodemodulazione non solo confermano la previsione dell'esistenza nella ionosfera di una frequenza giromagnetica per azione del C.M.T., ma concorda con il risultato di un gruppo di ricerche di laboratorio eseguite tra il 1930-34 in Italia da G. TODESCO, il quale ⁽⁹⁾ molto abilmente, nonostante la difficoltà presentata dalla tecnica delle microonde in quell'epoca, riuscì a dimostrare, facendo incidere un'onda di circa 18 cm su di un gas elettronico di un triodo, immerso in un campo magnetico di valore H corrispondente mediante la (1) all'onda di 18 cm, come per effetto della risonanza le orbite elettroniche di forma quasi circolare, si allargano notevolmente sottraendo così una parte di energia al campo elettromagnetico incidente.

Resta tuttavia da osservare che i metodi descritti sopra, servono per lo studio del C.M.T. soltanto di notte in quanto di giorno le onde medie adoperate sono troppo assorbite dalla ionosfera.

Se pertanto si desidera eseguire uno studio continuo, di giorno e di notte, del C.M.T. nello strato E, occorre ricorrere al metodo della girointerazione ottenuta però con incidenza verticale delle onde nella ionosfera. Poichè l'Autore ⁽¹⁰⁾ è riuscito a dimostrare che in tal caso il fenomeno di interazione con risonanza si verifica *anche di giorno* e siccome F. H. HIBBERD ⁽¹¹⁾ ha dimostrato teoricamente che con incidenza verticale si possono ottenere curve di risonanza con due massimi simmetrici rispetto alla girofrequenza, si può spe-

⁽⁹⁾ G. TODESCO: *Nature*, **129**, 203 (1932); *Rend. R. Acc. delle Scienze di Bologna*, Maggio 1934; *Rassegna Poste e Telecomunic.*, Febbraio 1935.

⁽¹⁾ M. CUTOLO: *Alta Freq.*, **18**, 169 (1949).

⁽¹¹⁾ F. H. HIBBERD: *Nuovo Cimento*, **10**, 380 (1953).

rare che di quest'ultimo metodo sia probabilmente più completo e più redditizio.

Esperienze in corso a Napoli potranno pertanto permettere presto di dire una parola conclusiva sul metodo più opportuno da adoperare e di trarre interessanti conclusioni sull'azione del campo magnetico terrestre.

Si ringrazia vivamente la dr.ssa Maria LOZZI per l'aiuto prestato durante l'elaborazione dei calcoli.

SUMMARY

In the last articles (5) we spoke on the phenomenon called gyrointeraction of radio-waves in the ionosphere. An important consequence of gyrointeraction is the measurement of terrestrial magnetic field H in the E layer with sufficient precision to reveal the presence of those electric currents in the ionosphere which are postulated to account for certain terrestrial magnetic variations. The method is simply to measure H continually in the E layer. It is only necessary to find resonance curves with two humps lying equidistant from the local gyrofrequency (fig. 1). The mean value of two frequencies (or wave-lengths) where the humps are lying is the gyrofrequency f_r . By (1) it is possible to know H . Table III contains the values of H found in Italy by gyrointeraction. One other method easier and at same time sufficiently accurate is self-modulation (or selfinteraction) of radiowaves, phenomenon recently observed by the author (6). If a radiowave modulated for instance at 230 Hz and at modulation's percentage strictly constant, is emitted varying its carrier frequency around the local gyrofrequency, we may observe that in the receiving station far from the transmitting one at least 200 km, the modulation's percentage of the signal is varying according to diagram of fig. 2. The minimum of modulation's percentage is on gyrofrequency. The mean value of the frequencies on which maxima of fig. 2 are lying gives gyrofrequency and by (1) H in the E layer. Table III contains some values of H found in Italy by selfmodulation. The degree of precision of the two methods here illustrated may reach the fourth decimal figure. The small changes of the frequencies on which the maxima are lying show the variations of H in the ionosphere. H in the E layer is smaller than on the Earth.

The Spectra and Sign Distributions of Particles from Cosmic Ray Stars at 2860 metres Altitude.

C. C. DILWORTH

Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre de Bruxelles

S. J. GOLDSACK

Physical Laboratories - University of Manchester ()*

(ricevuto il 27 Aprile 1953)

Summary. — Measurements have been made on mesons and protons emitted from stars recorded at 2800 m and compared with published results for balloon altitudes. It appears that, while the multiplicity of showers is greatly reduced at the lower altitudes, the normalized energy spectra are closely similar. The determination of the sign of the charge of particles leads to a preliminary determination of the positive-negative ratio of mesons produced at this altitude, and of πp 's primary and secondary to stars.

1. — Introduction.

The possibility of using magnetic deflection within the photographic emulsion to determine the sign of fast charged particles was demonstrated in a previous paper ⁽¹⁾. In this paper are described some results obtained by the method in an investigation of cosmic ray stars at the Pic du Midi (2860 m) in the French Pyrenees.

Although the maximum field available was only 34 000 gauss, information has been obtained on the relative number of positive and negative mesons

(*) Now at the Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre de Bruxelles.

⁽¹⁾ C. C. DILWORTH, S. J. GOLDSACK, Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT and F. LEVY: *Phil. Mag.*, Ser. 7, **61**, 1032 (1950).

produced in the stars. The sign ratio of those particles (πp) which could not be identified by combined scattering measurements and grain counting has also been investigated.

The energy spectra, irrespective of sign, of fast particles primary to and emitted from stars have been compared with those obtained by other workers on plates exposed at high altitudes by means of ballon flights.

2. — Experimental procedure.

2.1. *Exposure.* — Plates of Ilford G5 emulsion 400, 600 and 1 200 microns thick were exposed at the Pic du Midi, in a magnetic field which in most cases was 34 000 gauss, though a few plates were exposed in only 22 000 gauss. Some of the plates were of diluted G5 emulsion, which has a gelatine to silver ratio twice that of the normal G5. The scattering coefficient in the diluted emulsion is about 16% smaller than that in the normal emulsion, but the emulsion is more fragile and so requires special care in processing.

2.2. *Selection of tracks.* — The equivalent length of a track for sign determination is $l' = \beta l$ is the true length and β is the velocity in units of the velocity of light. Tracks were chosen for measurements which satisfied the condition $\beta l \geq 3$ mm; β being estimated from the grain density. This criterion of selection much reduced the number of protons which were measured since in the energy region where identification is possible protons have velocities $\beta < 1$, and so require longer tracks.

2.3. *Measurement.* — The measurements of scattering and total deflection were made using both the angular method as described by GOLDSCHMIDT⁽²⁾ and the sagittal method introduced by FOWLER⁽³⁾.

In a few cases both methods were used on the same track to confirm that the techniques were consistent. The data were analyzed by the method described in the previous paper⁽¹⁾ in which curves were presented showing the probability of error on the sign for various field strengths. Those curves require amendment for the following reason. The scattering constant used in these calculations was that for a one centimetre track length. If scattering measurements are made using a short cell length, and a cut off applied to eliminate single scatterings, the effective scattering constant may be reduced by as much as 20%. This is equivalent to increasing the magnetic field by

(²) Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT: *Nuovo Cimento*, **7**, 331 (1950).

(³) P. H. FOWLER: *Phil. Mag.*, Ser. 7, **41**, 169 (1950).

the same amount. Thus, with this method of analysis, and a cell of 100 microns, the curve for 34 000 gauss becomes that previously given for 41 000 gauss. If diluted emulsions are used a further 16% may be gained raising this figure to 47 000 gauss.

On tracks for which the scattering measurement showed a value of $p\beta$ less than 500 MeV/c (p = momentum) grain counting on 1 mm of the track is sufficient to distinguish between mesons and protons. For values of $p\beta$ greater than 500 MeV/c more accurate counts were made. In order to avoid proton contamination in the sign ratio of mesons, tracks for which $p\beta$ was greater than 1 000 MeV/c were considered unidentifiable, and were classed as πp . Due to statistical fluctuations a few tracks slightly less energetic than this, showed a mass value intermediate between that of a proton and that of a meson and were rejected. It did not seem necessary to make an accurate determination of the energy of those particles which could easily be shown to be much heavier than π -mesons after only rough measurements. A part only of each track was measured, giving an accuracy of about 25% on the energy: their signs were not determined. Under these conditions deuterons and tritons and heavy mesons could not have been distinguished from protons. For simplicity this group will be referred to as the proton group.

For meson tracks and for 49 tracks of protons which were fully measured the accuracy was between 10% and 15%.

2.4. *Control of distortion.* — On each plate the distortion vector K was measured; K represents the non-linear part of the displacement of the surface with respect to the glass ^(4,5) (uniform shearing of emulsion cannot curve a track).

In the plates used in this work K was generally less than 30 microns. This means that a track 1 cm long passing right through the emulsion in a direction perpendicular to the vector K , i.e. in the direction in which there is maximum second order distortion, the total deflection due to distortion was about 0.35° : the similar deviation due to a field of 34 000 gauss of a particle of momentum 10^9 MeV/c is 0.58° . Thus for most tracks the distortion was negligible, since generally the energy was lower, and only a component of the distortion was effective. When necessary a correction was made: a few tracks in which the distortion had changed the apparent sign of the particle were rejected.

⁽⁴⁾ M. COSYNS and G. VANDERHAEGHE: *Bull. Centre Phys. Nucl. Bruxelles*, No. 15 (1950).

⁽⁵⁾ J. MAJOR: *Journ. App. Phys.*, **3**, 309 (1952).

3. - Experimental results.

3.1. *Energy distribution.* - Among 7300 stars, 384 tracks were found with $\beta^2 l \geq 3$ mm. Of these 145 were identified as due to secondary protons and 111 as due to secondary mesons. Their energy distribution is given in fig. 1.

There were 19 secondary πp 's which are included in the energy distribution of all secondaries given in fig. 2. The relative numbers of protons and mesons given here is significant only when corrected for the systematic loss at low velocities, in choosing the tracks according to the criterion $\beta^2 l \geq 3$ mm. The ratio of the number of protons to that of mesons in a given energy range is (β_p^2/β_π^2) times the ratio observed, β_p being the velocity of a proton, β_π that of a meson in that energy range. This effect is corrected for in the energy spectra, which are given in fig. 3 and 4.

It is interesting to compare these results with those obtained by CAMERINI *et al.* (6) for their observations at 25 000 m. Their

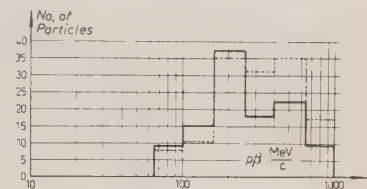


Fig. 1. - Energy distribution of secondary protons (dotted line) and secondary mesons (full line).

— Identified Mesons;
 Protons Deuterons and Tritons.

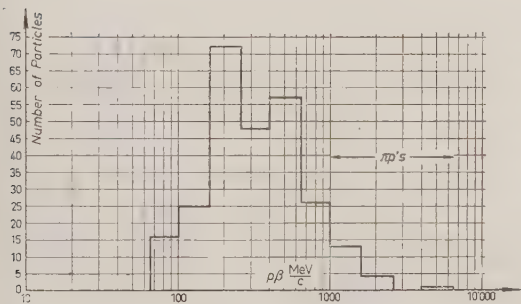


Fig. 2. - Energy distribution of all secondaries.

altitudes (7) Jungfraujoch (8) and the Pic du Midi (present work).

(6) U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK and H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **61**, 413 (1950).

(7) U. CAMERINI, J. H. DAVIES, P. H. FOWLER, C. FRANZINETTI, H. MUIRHEAD, W. H. LOCK, D. H. PERKINS and G. YEKUTELI: *Phil. Mag.*, **62**, 1241 (1951).

(8) R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING and C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **60**, 862 (1949).

TABLE I. — *Percentage of stars.*

Number of shower particles (Grain Density < 1.5 min)	25 000 m CAMERINI <i>et al.</i> (7)	3 580 m BROWN <i>et al.</i> (8)	2 860 m present work
0	72.5 %	86.3 %	84.5 %
1-3	22.4 %	12.4 %	14.7 %
4-7	2.4 %	0.9 %	0.7 %
8	0.7 %	0.4 %	0.1 %
Average number of shower particles per star	0.53	0.25	0.25

Our proton spectrum is subject to an uncertainty in the number of particles at low energies due to the condition $\beta^2 l \geq 3$ mm. In spite of the correction there remain subjective errors due to the observers estimation of grain densities.

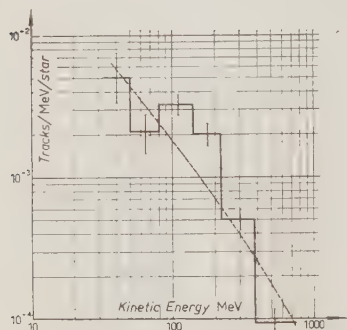


Fig. 3. — Energy spectrum for secondary mesons. The histogram represents the present results at 2860 m; the curve the results of CAMERINI *et al.* at balloon altitudes normalized to our results.

----- CAMERINI *et al.* (1950);
 ——— Present experiment.

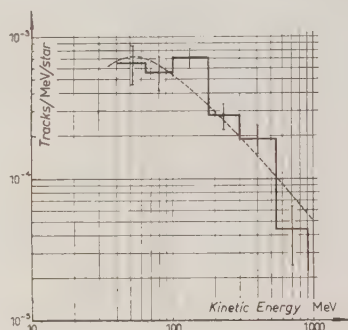


Fig. 4. — Energy spectrum for secondary protons. The histogram represents the present results at 2860 m; the curve the results of CAMERINI *et al.* at balloon altitudes, normalized to our results.

----- CAMERINI *et al.* (1950);
 ——— Present experiment.

Fig. 5 shows the energy distribution of all primaries compared with that obtained by CAMERINI *et al.* at 25,000 m (7). A primary being defined according to the convention used in that paper. There were 46 proton primaries, 27 meson primaries and 36 πp primaries.

3.2. *Magnetic deflection.* — The sign of the charge of a given particle is established in each case only with a certain probability. This probability is a function of the value assumed a priori for the ratio (r) of the number of positive to the number of negative particles. The probability $P_i(+)$, that the i^{th} particle is positive is:

$$(1) \quad P_i(+) = \frac{1}{1 + (1/r)e^{-\varepsilon_i}},$$

where ε_i is a function of its velocity, the total angle of deflection, the mean angle of scattering and the length of its track.

For an individual track we usually have no a priori knowledge of the sign ratio. We can only assume that $r = 1$ (Baye's hypothesis) giving

$$(2) \quad P_i^*(+) = \frac{1}{1 + e^{-\varepsilon_i}}.$$

When we have a group of tracks we can take as a first approximation to the sign ratio r the ratio

$$(3) \quad r^* = \frac{\sum P_i^*(+)}{\sum (1 - P_i^*(+))}.$$

However to obtain the best estimation of r we should solve the equation

$$(4) \quad r = \frac{\sum P_i(+)}{\sum (1 - P_i(+))} = \frac{\sum \frac{1}{1 + (1/r)e^{-\varepsilon_i}}}{\sum \frac{1}{1 + re^{\varepsilon_i}}}.$$

This can best be done graphically.

This calculation was carried out for the 111 secondary mesons together with the 27 primary mesons. We considered primary and secondary mesons together since the former can be assumed to be produced in the plate-magnet assembly. Putting $r = 1$ we found $r^* = 1.17$; by solving equation (4) we found $r = 1.5$.

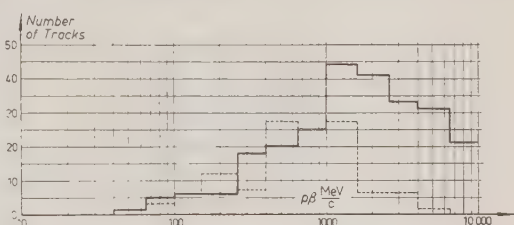


Fig. 5. — The energy distribution of particles primary to stars. The continuous lines are the results of CAMERINI *et al.* at balloon altitudes, the dotted lines are the present results at 2860 m.

—— CAMERINI *et al.* (1951);
 Present Experiment.

Fig. 6 is a histogram showing the distribution of the actual sign probabilities calculated for each track. A track at the extreme right is certainly positive, while one at the extreme left is certainly negative; a track giving a probability around 50% gives no information about its sign. This distribution

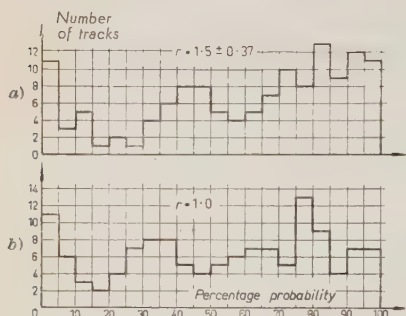


Fig. 6. - Sign probabilities calculated for meson tracks, (a) with $r = 1.0$, (b) with $r = 1.5$.

is given both for $r = 1$ ($P^*(+)$) and for the value $r = 1.5$ obtained from the experiment.

The analogous treatment of the 49 protons which were completely measured is illustrated in fig. 7. In this

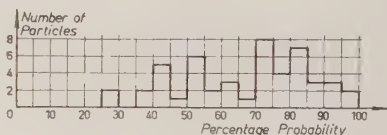


Fig. 7. - Sign probabilities calculated for proton tracks with $r = 1.0$.

case equation (4) has no real solution. The most probable value for the positive-negative ratio is infinite. Thus only the distribution with $r = 1$ is given. The second distribution would consist of a single column at the extreme right hand side.

Since each track has an error on the sign determination the total error on r is clearly greater than that obtained from a similar number of tracks for which the sign of each was certain. In the latter case the standard error on the estimate of a positive negative ratio r from N tracks is

$$\varepsilon(r) = \left\{ \frac{r(r+1)^2}{N} \right\}^{1/2}.$$

When the sign is determined for each track with only a certain probability $P_i(+)$, it can be shown that the preceding formula can still be used for a large sample by replacing N by N' where N' is the effective number of tracks and is given by

$$N' = N \left(\frac{P_i(+)^2(1+r)^2}{r} - 1 \right).$$

Where $P_i(+)^2$ is the mean square of $P_i(+)$.

For the 138 mesons $P_i^2(+)$ is 0.48, which leads to $N' = 0.5N$. The error

on the positive negative ratio is therefore $\varepsilon(r) = 0.37$. In figs. 8A and 8B are shown the energy distribution of the positive and negative mesons separately. For this purpose a track was reckoned positive if its probability was greater than 50% with $r = 1.5$. There may be expected to be considerable cross contamination of the spectra. Fig. 9 shows the distributions of the sign probabi-

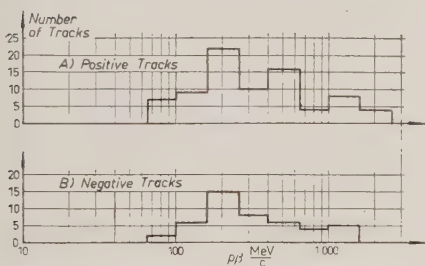


Fig. 8. — Energy distributions (a) of positive meson secondaries, (b) of negative meson secondaries.

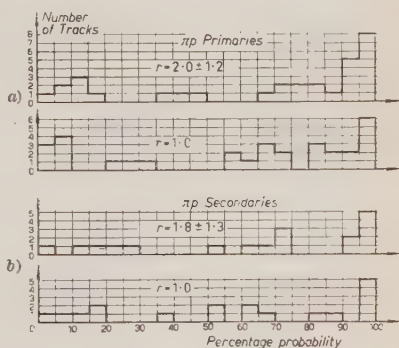


Fig. 9. — Sign probabilities of (a) πp primaries (b) πp secondaries.

lities for the πp 's (particles with $p\beta > 1000$ MeV/c) for the 36 primaries and 19 secondaries separately. The effective numbers of tracks in these cases are 18 and 10 respectively. The positive negative ratio for the primaries is 2.0 ± 1.0 for the secondaries it is 1.8 ± 1.2 .

4. — Discussion.

4.1. *Energy Distributions.* — The energy spectra of secondary particles agree quite well with those obtained at 25 000 m. The primary spectrum shows a shift towards lower energies and the multiplicity is about one half of that in stars produced at balloon altitudes. It seems therefore that multiplicity is much more sensitive to primary energy than is the form of the secondary energy spectrum.

4.2. *Magnetic deflection.* — Among the mesons produced in the plate-magnet assembly there is a positive excess of 1.5 ± 0.37 . Among πp 's there is an excess of 2.0 ± 1.0 for the primaries and 1.8 ± 1.2 for the secondaries.

The last value can be compared with the results of BARKER and BUTLER from cloud chamber work (⁹). They found for all particles with $p \geq 1000$ MeV/c

(⁹) K. H. BARKER and C. C. BUTLER: *Proc. Phys. Soc. Lond.*, A, **64**, 4 (1951).

TABLE II.

	No. of mesons	$p\beta$	Sign	Primary
1	2	1 100 650	— 88 % + 70 %	Uncharged
2	2	300 500	— 63 % — 98 %	Uncharged
3	2	320 270	— 99 % + 97 %	Charged
4	2	220 770	+ 20 % + 83 %	Charged
5	2	460 1 000	+100 % —100 %	Uncharged
6	2	280 250	— 91 % — 98 %	Uncharged
7	2	180 480	— 66 % + 75 %	Charged
8	2	9 500 510	Distorted —100 %	Charged
9	3	200 240 110	— 73 % + 55 % — 54 %	Uncharged
10	4	220 400 500 600	— 77 % — 66 % + 76 % + 61 %	Uncharged
11	5	320 200 280 25 150	+ 63 % + 55 % + 57 % — 55 % + 71 %	Uncharged

a positive negative ratio of 2.7 ± 0.7 . To compare this with our result we must first correct for those protons whose momentum is greater than 1000 MeV/c but for which $p\beta < 1000$ MeV/c. It can be deduced from emulsion data that for every 100 tracks taken as πp under our convention BARKER and BUTLER would include a further 28 protons. Correcting for these the result of BARKER and BUTLER becomes 1.9 ± 0.5 , in good agreement with the value found in this work.

There is no significant difference between the spectra of positive and negative mesons. The bulk of the statistics are in the higher energy region, where there seems little reason to expect any difference: the effects of Coulomb repulsion at nucleus and of the excess of neutron primaries should not have much effect above about 200 MeV.

Eleven stars had two or more meson secondaries each, all measured. The results for all such complete stars measured are shown in Table II.

Conclusion.

The method of magnetic deflection inside the emulsion can be used for a statistical study of the signs of fast charged particles produced in cosmic ray stars in the photographic emulsion. The measurements on a given track do not in general determine the sign with complete certainty, so that the error on a positive negative ratio is greater than the statistical error which the same number of tracks would give if the signs were certain. It is convenient to refer to an effective number of tracks which is the number which would give the same precision if the signs were determined with certainty. With the field at our disposal, and taking all tracks with $\beta^2 l \geq 3$ mm this effective number proves to be about one half of the actual number of tracks.

With a field of the order of 50 000 gauss such as is now available in the Merlin-Someda magnet (private communication), the same efficiency of sign determination could be obtained on twice as many tracks for the same number of stars. The increase in the number of complete stars should be much greater roughly proportional to $(50/34)^{2n}$, where n is the number of shower particles in a given star.

We thank Profs. BLACKETT and OCCHIALINI and Dr. ROCHESTER for their direction and encouragement, and Prof. SCHÖNBERG for many useful discussions.

We are indebted to Ilford Ltd and to Observatoire du Pic du Midi for the provision and exposure of the plates. For an additional exposure to complete the statistics we are very grateful to Dr. MERLIN of the University of Padua.

We wish to express our gratitude to our colleagues, especially to Dr. NORA PAGE, for their help in this work.

We acknowledge gratefully the assistance of the scanning teams of both laboratories and in particular of Mlles. CORNIL and VANDENCAMP who made a part of the measurements.

RIASSUNTO

Sono state eseguite misure sui mesoni e protoni emessi da stelle osservate in emulsioni nucleari esposte a 2800 m di altitudine. I risultati sono stati confrontati con quelli già pubblicati, relativi a quote stratosferiche. Si vede che mentre la molteplicità degli sciami si riduce grandemente a bassa quota, gli spettri di energia normalizzati sono simili. La determinazione del segno della carica delle particelle conduce a un valore preliminare del rapporto mesoni positivi/mesoni negativi prodotti alla suddetta altitudine, e dei π - p primari e secondari.

Contributions to the τ -Meson Investigation

E. AMALDI, G. BARONI, C. CASTAGNOLI, G. CORTINI and A. MANFREDINI

Istituto di Fisica dell'Università - Roma

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 4 Maggio 1953)

Summary — Two τ -mesons have been observed in photographic emulsions exposed to cosmic rays at an altitude of 26 000 metres. The corresponding data are summarized in par. 2. The process of decay of τ -mesons is considered in par. 3 where, by means of a statistical consideration applied to the measurements on τ -mesons observed by various authors, it is proved that the process of decay in 3π is by far the more likely. The spectrum of the decay products of τ -meson is considered in par. 4: a comparison with the spectrum calculated on the basis of the statistical factors does not allow any definite conclusion to be reached about the possible existence of correlations among the three decay products on account of the very poor statistics available. Finally in par. 5 the ratio τ -mesons/ π -mesons coming to rest in the emulsions is considered. A comparison is made between the values of this ratio at balloon and at mountain altitudes.

1. — Introduction.

In the study of photographic emulsions exposed to cosmic rays in the high atmosphere during the International Expedition held in Sardegna in June-July 1952, two events have been observed which can be interpreted as the decay of τ -mesons at rest. The more interesting information about the first one (R_1) has already been communicated on the occasion of various Conferences and will appear in the corresponding Proceedings ⁽¹⁾; they are collected

⁽¹⁾ G. BARONI, C. CASTAGNOLI, G. CORTINI, C. FRANZINETTI and A. MANFREDINI: *Third annual Rochester Conference on « High energy physics »*, Rochester, Dec. 1952; *Royal Society Conference on Heavy Mesons*, London, Jan. 1953.

in table I together with the data on the second event indicated in the following as R_2 .

The discussion of these data add to the already existing material ⁽²⁾ ⁽⁷⁾ to some more evidence about the nature of the decay products, the Q value and the mass of τ -meson. In particular the event R_1 is the first case in which one of the decay products was observed to undergo in the emulsion the typical $\pi \rightarrow \mu$ decay process. A second similar case (M_1), which shows also the $\pi \rightarrow \mu$ decay, has been observed more recently by the Milan group ⁽⁵⁾. These two events (R_1 , M_1) together with the first τ -meson observed by the Bristol group ⁽²⁾ (B_1) in which one of the secondary particles gives rise to a star, prove that, if all the observed heavy mesons disintegrating in 3 charged particles are of a single type, at least one of the corresponding decay products is certainly always a charged π -meson.

A short discussion, along the usual lines, of the conclusions that can be drawn from the individual observations on the events R_1 and R_2 (fig. 1), is given in § 2.

Although the total number of τ -mesons observed until now in photographic emulsions in all laboratories is about ten, one can try to see if a few conclusions can be derived by means of statistical considerations. According to this point of view we will discuss in § 3, the nature of the three decay products of the τ -meson and we will show that the application of the χ^2 -test to the available experimental data, taking the three possible assumptions about the scheme of decay ($\pi + \mu + \mu$, $\pi + \pi + \mu$, $\pi + \pi + \pi$), gives results definitely in favour of the last one.

This conclusion of statistical type added to all the individual pieces of evidence collected by various authors, settles in a definitive way the problem of the nature of the decay products of τ -mesons. As a conclusion of that paragraph we give the more probable values of Q and m_τ .

A second problem which seems to be of great importance in connection with the structure of the τ -meson as for instance its intrinsic angular mo-

⁽²⁾ R. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. MUIRHEAD, C. F. POWELL and D. M. RITSON: *Nature*, **163**, 82 (1949); P. H. FOWLER, M. G. K. MENON, C. F. POWELL and O. ROCHAT: *Phil. Mag.*, **42**, 1040 (1951).

⁽³⁾ J. B. HARDING: *Phil. Mag.*, **41**, 405 (1950); P. E. HODGSON: *Phil. Mag.*, **32**, 1060 (1951); A. J. HERZ, P. E. HODGSON and R. M. TENNENT: *Phil. Mag.*, **44**, 85 (1953).

⁽⁴⁾ M. CECCARELLI, N. DALLAPORTA, M. MERLIN and A. ROSTAGNI: *Nature*, **170**, 454 (1952); M. CECCARELLI, N. DALLAPORTA, M. MERLIN, G. QUARENI and G. T. ZORN: private communication.

⁽⁵⁾ M. PANETTI and L. SCARSI: *Nuovo Cimento*, **10**, 687 (1953).

⁽⁶⁾ BRISTOL GROUP: private communication.

⁽⁷⁾ O. LOCK: private communication.



Fig. 1. - Event R_2 : τ -meson observed by Mr. G. MAIOLO.

mentum, is that of the possible existence of correlations among the energies of the three decay products.

This problem is considered in § 4 where we compare the experimental results with the energy spectra of all the three decay products as well as of the π -meson of lower energy, calculated taking in consideration only the corresponding volumes of the phase space.

Finally in § 5 we compare the frequency of the observed τ -mesons decaying at rest with the frequency of the observed π -mesons coming at rest in the emulsion.

2. — Analysis of the two τ -mesons.

Table I contains the data on the two observed τ -mesons. The following few remarks can be added about R_1 . The decay product a has a range of $690 \pm 6 \mu$ and then decays into an ionizing secondary particle which goes out of the emulsion after a path of 510μ ; from scattering and ionization measurements it is possible to deduce that its mass is certainly smaller than $700 m_e$. This conclusion excludes the possibility that it is due to a proton. The more likely interpretation is that it is due to a μ -meson (¹). Better measurements on this track are not possible because of its large angle of dip (40°). The error of the grain-density measurements is rather large on account of unevenness of processing as a function of depth.

Also the mass of the primary of R_2 could not be determined because of its large angle of dip (50°).

Columns 11 and 12 of table I contain the energy of the decay products deduced respectively from the grain density and the scattering measurements under the assumption that they are due to π -mesons. In the case of event R_1 the energy of track a can be deduced with very good accuracy from the corresponding range measurements. Therefore in this case we could also determine the energy of the other two decay products by applying the momentum conservation and making use of the angles given in column 8 of table I.

Because one of its tracks stops in the emulsion, the event R_1 is very suitable for a detailed discussion aiming to identify the other two particles. The procedure used is very similar to that followed by other authors (¹) and reached quite similar conclusions namely that the decay scheme in three π -mesons, is by far the best fit for all the data of table I.

A similar discussion about R_2 has been omitted in consideration of the statistical argument presented in the next paragraph which seems to settle this problem in a definitive way.

Finally in column 13 we give the weighted average of the results collected in columns 10, 11 and 12.

TABLE I.

Primary particle			Secondary particles										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Thickness of emission (microns)	l (μ)	$m\tau/m^e$			l (μ)	g/d_0	θ_i	$\langle\alpha_{100\mu}\rangle$	T_{nom}	T_{grains}	T_{exalt}	$\langle T \rangle$	Q
R_1			a		690 ± 6 ($\pi \rightarrow \mu$ decay)		$18^\circ 40' \pm 1^\circ$		5.0 ± 0.1			5.0 ± 0.1	
	1200	1600	880 ± 200	b	1100	1.7 ± 0.1	$58^\circ 50' \pm 1^\circ$	0.43 ± 0.07	32.2 ± 2.8	40 ± 4	32 ± 7	34.6 ± 2	79.9 ± 2.9
			c		6200	1.6 ± 0.05	$102^\circ 30' \pm 1^\circ$	0.43 ± 0.05	40.7 ± 3.4	43 ± 3	32 ± 5	40.3 ± 2.1	
R_2			a		2065	1.8 ± 0.1	$95^\circ \pm 1^\circ$	0.35 ± 0.09		35 ± 4	40 ± 11	36.5 ± 3.8	
	600	1100	b		3520	2.8 ± 0.15	$45^\circ \pm 1^\circ$	0.76 ± 0.14		18.5 ± 1	18.5 ± 4	18.5 ± 0.9	71.5 ± 4.0
			c		410	3.2 ± 0.18	$39^\circ \pm 1^\circ$			16.5 ± 1.2		16.5 ± 1.2	

(*) From range measurement.

TABLE II.

	n (*)	χ^2	P	n (*)	χ^2	P
$\pi + \mu + \mu$	14	86	$< 10^{-6}$	16	87	$< 10^{-6}$
$\pi + \pi + \mu$	14	118	$< 10^{-6}$	16	120	$< 10^{-6}$
$\pi + \pi + \pi$	14	13	0.53	16	17	0.39

(*) n = number of statistical degrees of freedom.

TABLE III.

Meson	B_1 (2)	B_2 (2)	L_1 (3)	L_2 (3)	L_3 (3)	M_1 (5)	Ma_1 (7)	P_1 (4)	P_2 (4)	R_1 (1)	R_2
T_a	33 ± 6	32 ± 3	45 ± 18	25 ± 7.5	33.5 ± 7.5	42.4 ± 3.5	47.5 ± 4.5	41.6	30.2 ± 3.4	40.3 ± 2.1	36.5 ± 3.8
T_b	31 ± 6	24.2 ± 3	17.5 ± 12	24 ± 6	31.0 ± 6	30.6 ± 5.6	15.5 ± 4.5	27.8	30 ± 6	34.6 ± 2.2	18.5 ± 0.9
T_c	1.04 ± 0.15	19 ± 0.6	13.3 ± 4.5	20 ± 6	9.0 ± 2.2	2.2 ± 0.05	15 ± 4.5	17.1	17.9 ± 1.9	5.0 ± 0.1	16.5 ± 1.2
$Q - T_a + T_b + T_c$	65 ± 8.5	75.3 ± 4.3	75.8 ± 22	69 ± 11	73.5 ± 10	75.2 ± 6.6	78 ± 7.8	86.5 ± 8 (*)	78.2 ± 7.2	79.9 ± 2.9	71.5 ± 4

(*) This value of the standard deviation is deduced from the author's discussion (4) and not directly from the results of the measurements.

(4) to (7) - See the corresponding references.

3. - Statistical considerations about the nature of the three decay products.

In this paragraph we give a statistical discussion about the nature of the three decay products of τ -meson based on the well established fact that at least one of them is certainly always a π -meson.

We apply to 7 known τ -mesons ($B_2 L_1 L_3 P_1 R_1 M_1 R_2$) the method of FOWLER and coworkers⁽²⁾ which allows the determination of the ratios of the masses of the three particles by angle and grain-density measurements. Namely by applying the momentum conservation, one gets

$$(1) \quad m_a : m_b : m_c = \frac{\sin \theta_a}{f(g_a)} : \frac{\sin \theta_b}{f(g_b)} : \frac{\sin \theta_c}{f(g_c)},$$

where $f(g) = \beta/\sqrt{1 - \beta^2}$ is a known function of the grain density g , and $\theta_a, \theta_b, \theta_c$, the angles opposite to p_a, p_b, p_c in the triangle of the momenta.

The three possible schemes of decay that have to be tested are the following

$$(2) \quad \tau \rightarrow \pi + \mu + \mu,$$

$$(3) \quad \tau \rightarrow \pi + \pi + \mu,$$

$$(4) \quad \tau \rightarrow \pi + \pi + \pi.$$

In order to do that, let us first assume that the correct scheme of decay is given by (2), and that for each of the considered τ , the only π -meson is that corresponding to the largest (m_M) of the three relative masses deduced by means of eq. (1). For the moment we ignore the fact that this last assumption can introduce an error which favours the decay scheme (2).

Then we have to expect that the values of the ratio m_i/m_M of the masses of the other two decay products to that of the corresponding π -meson, fluctuate around the expected value $m_\mu/m_\pi = 0.76$. This point can be tested by calculating the χ^2 corresponding to the 14 experimental values (with their standard deviations) of the ratio m_i/m_M with respect to the value m_μ/m_π expected according to the decay scheme (2). The result of such a calculation is given in columns 2 to 4 of table II.

Then we consider the decay scheme (3) and we assume that for each of the considered τ , the only μ -meson is that corresponding to the smallest (m_m) of the three relative masses deduced by means of eq. (1). We ignore again that this last assumption can introduce an error which favours the decay scheme (3) and we calculate the χ^2 corresponding to the 14 experimental values

(with their standard deviations) of the ratio m_i/m_m with respect to the value $m_\pi/m_\mu = 1.31$ expected according to the decay scheme (3). The result of such a calculation is given again in columns 2 to 4 of table II.

It is well known that the probability P given in column 4 of table II has the following meaning (*): if the assumed decay scheme is correct and if the experimental points deviate from the expected value according to a normal distribution, P represents the probability that in a set of 14 determinations one finds deviations as large as or larger than the observed ones. Therefore the values of P given in table II for the two above considered scheme of decay are grossly overestimated not only for the rule introduced in order to select the meson of known mass (the π for the decay-process (2) and the μ for the decay-process (3)) but also because we neglect completely the fact that all the experimental determinations lie, in each case, on the same side of the corresponding theoretical value.

In order to complete this argument we have at last applied the χ^2 -test to the decay-process (4). In order to do that we have calculated for all 3 decay products of the 7 considered τ -mesons, the ratios

$$(5) \quad q_i = 3 \frac{m_i}{m_a + m_b + m_c}, \quad (i = a, b, c)$$

and the corresponding standard deviations, and we have applied the χ^2 -test to the 21 values of q_i with respect to its theoretical value 1 corresponding to the assumption that the 3 decay products of each τ -meson have equal masses. The result of such a calculation is given in the last row of table II and shows that the observed deviations around the theoretical value 1 correspond, more or less, to what we have to expect according to the experimental standard deviations of the single measurements.

Such a statistical consideration, added to all the pieces of evidence given until now by various authors as well as in § 2 of this paper, settles in a definitive way the problem of the decay scheme of τ -mesons.

This consideration was finished when we received, through the kindness of Prof. N. DALLAPORTA, the data relative to the second τ -meson observed by the Padova group (P_2).

This event, considered alone, could be better interpreted as an example of the decay process (3). Therefore we thought it worth while to include it in our statistical considerations. The results of the χ^2 -test thus obtained are given in the second part of table II, and show that, if an alternative decay process exists as suggested by the Padova group, the corresponding probability is rather low.

(*) K. PEARSON: *Phil. Mag.*, V, 50, 157 (1900).

As a conclusion we give in table III a list as complete as possible of all τ -mesons for which we know the energies of the decay products (and the corresponding standard deviations).

Taking a weighted average of the Q values given in table III one gets

$$Q = 76.3 \pm 1.7 \text{ MeV}$$

and assuming for the charged π a mass (⁹)

$$m_{\pi} = 141.41 \text{ MeV},$$

one gets

$$m_{\tau} = 980 \pm 4.4 m_e.$$

A test of the internal consistency shows that the Q -values given in table III have a normal distribution around the mean value. This fact seems to support our assumptions of a single process of decay.

4. - The energy spectrum of the decay products.

Some interesting information about the structure of the τ -meson, could certainly be derived by a sufficiently detailed knowledge of the spectrum of its decay products. The experimental data available to day are certainly too scanty to allow any definite conclusion on this point. We can, however, calculate the statistical factor which enters in the expression of the energy spectrum and try to compare it with the experimental results.

The details of the calculation are given in Appendix A.

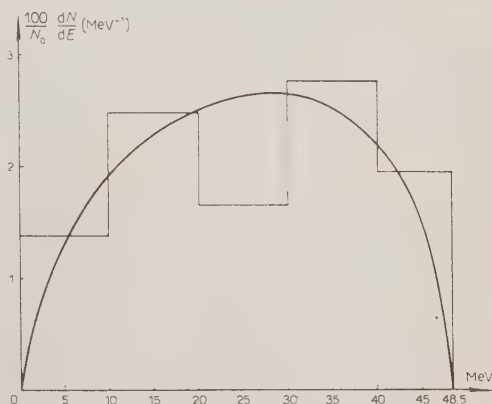


Fig. 2. - Frequency distribution of π -mesons from τ -meson decay. Histogram: experimental distribution of 36 π -mesons (normalized to a total area of 100). Continuous curve: purely statistical distribution, calculated with $Q = 75 \text{ MeV}$.

(⁹) We take a weighted mean of π^+ and π^- meson masses, as determined by W. H. BARKAS, F. M. SMITH and E. GARDNER: *Phys. Rev.*, **82**, 102 (1951).

A reasonable agreement (fig. 2), inside the large errors, is found between the calculated spectrum of all the decay products and the experimental spectrum obtained using the 33 π -mesons collected in table III plus the B_3 for which we have only incomplete information (*). Such an agreement does not mean very much, because the spectrum of all three the decay products does not seem to be the most sensitive test on account of the theorems of conservation.

Therefore we have tried to compare the spectrum of the π -meson having, in each case, the lowest energy of the three decay products, with the theoretical results explained in Appendix A.

The results of such a comparison are shown in fig. 3 where the experimental data are presented in the form of a histogram. The shaded part of the histogram, corresponding to π -meson stopping in the emulsion ($B_1 R_1 M_1$), has to

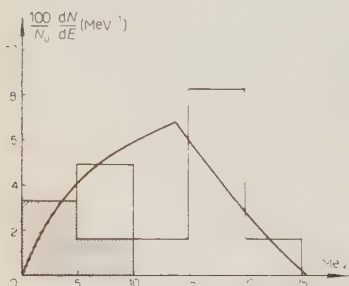


Fig. 3. — Frequency distribution of π -mesons of lower energy produced in τ -meson decays. The statistical distribution is calculated for $Q = 75$ MeV. The shaded area corresponds to π -mesons going to rest in the emulsion.

be corrected in order to take into account the fact that the efficiency of detection is higher for a τ -meson having one of its three decay products coming at rest in the emulsion. An evaluation of such a correction is given in Appendix B where it is shown that the numbers of τ -mesons corresponding to the shaded area of fig. 3, have to be multiplied by a factor of about 0.6.

After having introduced this correction factor and normalized again the experimental curve, we have compared it with the theoretical one. This comparison, of course, cannot give a definite conclusion. In fact the χ^2 -test on the comparison between the experimental and the calculated distribution gives a probability of about 26% (*). This figure is not seriously affected by the assumed value of the correction factor k .

Consequently the problem of the spectrum of the decay products remains one of greatest interest for future investigation.

(*) *Note added in proofs.* If one extends this consideration to the two τ -mesons recently observed by the Bombay group (and for whose data we thank Dr. B. PETERS) the probability decreases slightly: from 26% to 17%.

5. - Frequency of production of τ -meson.

It is known from cloud chamber experiments that the mean life of τ -meson cannot be much longer than 10^{-8} seconds.

Therefore the τ -mesons observed in a balloon flight are certainly produced locally: the same argument holds for the π -mesons observed under the same conditions.

Considering the dimensions of the assembly of the photographic plates used in the balloon flight, we can conclude that both the τ and the π -mesons that stops in the emulsion have been generated with residual ranges not larger than about 10 cm of matter of density about 3 g/cm³.

Such a condition does not hold for the plates exposed at mountains altitudes. Therefore a comparison of the ratio

$$R = \frac{N_{\tau}}{N_{\pi}},$$

observed at balloon altitudes and at mountain altitudes, gives, at least in principle, some information on the spectrum of generation of the τ -meson. In fact if the spectrum of generation of τ -mesons is quite different from that of generation of the π -mesons one would expect a great difference of the value of R under the two conditions of exposure.

Putting together our data and that of the Milan group, one gets, for the exposure at high altitude,

$$R = \frac{3}{850} \sim 3.5 \times 10^{-3},$$

i.e. a value very close to that obtained at mountain altitudes by other authors (³).

Our thanks are due to Dr. C. FRANZINETTI and Dr. D. MORENO for their generous help and to the scanners Mr. C. SGARBI and Mr. G. MAIOLO who found the events R_1 and R_2 .

APPENDIX A

The statistical factor is obviously proportional to the element of volume of the phase-space namely to (¹⁰)

$$(A1) \quad \varrho dE_1 dE_2 = \text{const} \times p_1^2 dp_1 p_2^2 dp_2 \frac{d\Omega}{dE} d\Omega;$$

(¹⁰) W. B. FRETTER, M. M. MAY and M. P. NAKADA: *Phys. Rev.*, **89**, 168 (1935).

which, by elementary transformations becomes

$$E_1 E_2 (m_\tau - E_1 - E_2) dE_1 dE_2.$$

In order to have the energy spectrum $s(E_1)dE_1$, we have to integrate equation (A1) with respect to E_2 between its two extreme values for a given E_1 :

$$(A2) \quad s(E_1) dE_1 = dE_1 \int_{E_{2\min}}^{E_{2\max}} s dE_2.$$

By elementary calculations we get:

$$(A3) \quad \left. \begin{matrix} E_{2\max} \\ E_{2\min} \end{matrix} \right\} = \frac{(m_\tau - E_1)B \pm \{(m_\tau - E_1)^2 B^2 - B(B^2 + 4C)\}^{1/2}}{2B}$$

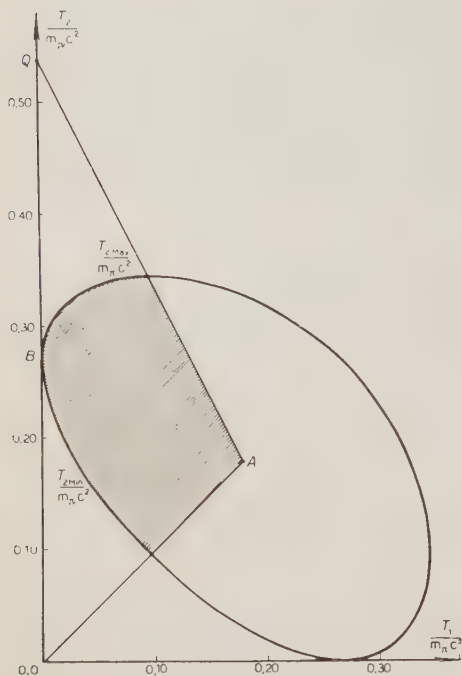


Fig. 4. - Allowed interval of kinetic energy T_2 of one of the decay particles from a τ -meson, when the energy T_1 of another particle has been fixed.

where

$$B = m_\tau^2 + m_\pi^2 - 2m_\tau E_1,$$

$$C = m_\pi^2 (E_1^2 - m_\pi^2).$$

In order to calculate the spectrum of the π -meson of lower energy let us consider fig. 4, where each point represents a process of decay of a τ -meson: the two axis represent respectively the kinetic energies T_1 and T_2 of the first and second π -meson. The straight lines OA and QA have equations

$$(A4) \quad T_2 = T_1; \quad T_2 = Q - 2T_1.$$

In order that the particle 1 has the lower energy of the three decay products, it is necessary that the representative point falls inside the triangle OQA . On the other hand the two curves represent the two equations (A3) and therefore the useful area is the shaded one. By integration, for each value of E_1 , with respect to E_2 between the limits thus established, we get the curve of fig. 3.

APPENDIX B

The experimental spectrum of the decay products of a τ -meson is certainly affected by a systematic error due to the fact that the identification of a τ -meson is much easier when one of the three π -mesons stops in the emulsion giving rise to a star or a $\pi \rightarrow \mu$ decay process. The calculation of such a correction is rather difficult also because the experimental data have been obtained in different laboratories. However, it can be evaluated under the following assumptions:

a) the track that stops in the emulsion is always due to the π -meson of lower energy;

b) the tracks are straight lines;

c) the angular distribution of the π -meson of lower energy is isotropic with respect to the emulsion;

d) the efficiency of detection is constant and equal to a or b respectively for τ -mesons having one of its products of decay stopping in the emulsion or not.

Under these assumptions we get immediately the following expressions for the numbers N_{in} , N_{out} of observed τ -mesons having or not having a π stopping in the emulsion:

$$(B1) \quad \begin{aligned} N_{\text{in}} &= a \int_0^{x_{\text{max}}} S(x)P(x)dx, \\ N_{\text{out}} &= b \int_0^{x_{\text{max}}} S(x)[1 - P(x)]dx, \end{aligned}$$

where x is the range of the π -meson of lower energy ($0 \leq x \leq x_{\text{max}}$), $S(x)$ the experimental spectrum of the π -mesons of lower energy as a function of the range, $P(x)$ is a probability function.

Actually, if N_a is the number of τ -mesons observed in emulsion of thickness d , we must take

$$P(x) = \frac{1}{N} \sum N_a P_a(x),$$

where $N = \sum N_a$ and

$$P_a(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \frac{x}{d} & \text{for } x < d, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{x} & \text{for } x > d. \end{cases}$$

is the probability that a track of residual range x comes to rest inside an emulsion of thickness d . From (B1) we get

$$(B2) \quad \frac{N_{out}}{N_{in}} = \frac{b}{a} \frac{\int_0^{x_{max}} S(x)[1 - P(x)] dx}{\int_0^{x_{max}} S(x)P(x) dx}.$$

If the experimental data about $S(x)$ were large enough, one could apply equation (B2) to such a narrow interval of range $x_2 - x_1$ that we would have

$$(B3) \quad k = \frac{b}{a} = \left(\frac{N_{out}}{N_{in}} \right)_{x_2 - x_1} \frac{\int_{x_1}^{x_2} S(x)P(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} S(x)[1 - P(x)] dx} \cong \left(\frac{N_{out}}{N_{in}} \right)_{x_2 - x_1} \frac{P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{1 - P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}.$$

For the moment we can try to calculate the correction factor k introducing in eq. (B2) for $S(x)$ the range spectrum deduced from the « statistical » energy spectrum given in fig. 3. By numerical integration, and using the experimental data

$$\frac{N_{in}}{N_{out}} = \frac{3}{9},$$

we get in this way $k \sim 0.6$.

RIASSUNTO

Nello studio di lastre nucleari esposte alla radiazione cosmica a 26000 m s.l.m. sono stati osservati 2 mesoni τ i cui dati sono raccolti e discussi nel par. 2. Nel par. 3 viene discusso il processo di decadimento del mesone τ e a mezzo di considerazioni statistiche applicate alle misure delle masse dei prodotti di decadimento dei mesoni τ osservati da vari Autori, si dimostra che quello in 3 mesoni π è di gran lunga più verosimile. Nel par. 4 viene discusso lo spettro energetico dei prodotti di decadimento: il confronto con lo spettro calcolato tenendo conto dei soli fattori statistici, non permette di raggiungere alcuna conclusione definitiva, a causa della povertà statistica dei dati sperimentali, per quanto riguarda la possibile esistenza di una correlazione fra i prodotti di decadimento. Infine nel par. 5 si determina il rapporto fra il numero di mesoni τ e il numero di mesoni π che si arrestano nella emulsione esposta in alta quota, e lo si confronta con l'analogo rapporto ottenuto a quote montane.

Neutron Capture γ Rays from Deuterium

A. BRACCI, U. FACCHINI, E. GATTI, E. GERMAGNOLI, A. MALVICINI and G. PERONA

Laboratori C.I.S.E. - Milano

(ricevuto l'11 Maggio 1953)

Summary — The spectrum of γ rays emitted in the reaction $N + P \rightarrow D + \gamma$ has been studied by means of a single crystal spectrometer and a pulsed neutron source. No γ lines, whose energy is less than deuteron binding energy (2.23 MeV), has been observed within the limits of sensitivity of the detecting device; therefore the probable existence of a bound level of neutron-proton system, which was inferred by NAKAGAWA, is not confirmed.

1. — Introduction.

An investigation of radiations emitted in the reaction



provides a method of measuring deuteron binding energy and of inferring the eventual existence of bound levels in neutron-proton system. If no such excited states exist, the spectrum of γ rays emitted in the preceding reaction would consist of one line only, whose energy is equal to deuteron binding energy. Well known theoretical arguments ⁽¹⁾ support such an hypothesis; the above mentioned γ line was observed and its energy accurately measured by BELL and ELLIOTT ⁽²⁾ as 2.230 ± 0.007 MeV.

The energy spectrum of slow neutron capture γ rays produced in the studied

⁽¹⁾ J. M. BLATT and V. F. WEISSKOPF: *Theoretical Nuclear Physics* (New York, 1952).

⁽²⁾ R. E. BELL and L. G. ELLIOTT: *Phys. Rev.*, **79**, 282 (1950).

reaction was investigated by NAKAGAWA ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ by means of measurements by absorption of Compton recoils. This author found, besides a 2.24 MeV line corresponding to the transition to the ground state of neutron-proton system, two lines, both nearly as intense as the above mentioned line, their energies being quoted as 1.4 and 0.8 MeV.

Such a result should evidently require a revision of the whole theory of neutron-proton interaction. On the other hand the method used by NAKAGAWA is a rather indirect one and his results cannot be easily interpreted. It seemed to us consequently worth while to repeat such a measurement with a different method, especially as no measurement has been made up to now of the low energy portion of the γ rays spectrum emitted in the reaction ${}^1\text{P}(n, \gamma){}^2\text{D}$.

2. - Experimental method.

In recent years considerable interest has been given to the analysis of neutron capture γ rays spectra; this interest is accounted by the vast data about neutron binding energies and level distributions and spacings in the nuclei, which can be inferred from such measurements.

A summary of the methods of analysis of γ spectra developed so far was made by HAMERMESH and HUMMEL ⁽⁷⁾.

Generally a continuous thermal neutron source is used, possibly neutron flux from the thermal column of a pile. A very intense source is indeed required for the development of analysis methods of high resolving power, e.g. the pair spectrometer used by KINSEY *et al.* ⁽⁸⁾. For γ energies larger than about 3 MeV up to now such a method gave the most interesting and conclusive results.

Scintillating crystals technique is often employed, but so far it does not seem intrinsically capable of giving comparable results with regard to precision in the range of highly excited states, where level spacings are generally rather low, because the resolving power can hardly be made better than 10%.

This method is however remarkably interesting whenever level spacing is large (some hundred keV at least), as in the case of very light nuclei, or when used as a complementary device to pair spectrometer in the low energy range.

During the present experiments the 400 kV static accelerator described in

⁽³⁾ S. NAKAGAWA, I. SUMOTO and M. ARAI: *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19**, 373 (1947).

⁽⁴⁾ S. NAKAGAWA: *Journ. Sci. Res. Inst. Tokyo*, **43**, n. 1185 (1948).

⁽⁵⁾ S. NAKAGAWA: *Journ. Sci. Res. Inst. Tokyo*, **43**, n. 1196 (1949).

⁽⁶⁾ W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON and W. A. FOWLER: *Rev. of Mod. Phys.*, **22**, 295 (1950).

⁽⁷⁾ B. HAMERMESH and V. HUMMEL: *Phys. Rev.*, **88**, 916 (1952).

⁽⁸⁾ B. B. KINSEY and G. A. BATHOLOMEW: *Phys. Rev.*, **89**, 375 and 386 (1953).

a preceding paper ⁽⁹⁾ was used to produce neutrons. A small volume of water was contained in a cubic vessel surrounding the target; so fast neutrons produced in the reaction $D + Li$ were slowed down and, when thermalized, partly captured by hydrogen atoms, giving place to the reactions ${}^1P(n, \gamma){}^2D$. The mean life of neutrons in the used water tank was about 70 μs , that is to say rather shorter than the mean life in an infinite tank (about 205 μs) because the escape probability of neutrons from the slowing down medium, whose linear dimensions were comparable with diffusion length, was not negligible in comparison with capture probability. The effect of γ rays emitted together with neutrons in $D + Li$ reactions, and that of γ rays produced by fast neutrons, which would have been felt in a background superimposed to the investigated spectrum, was eliminated by using a pulsed ion source, so that neutrons were produced in periodic bursts, shorter than the mean life of neutrons in the water and by using a suitable locking circuit which locked the pulse analyzer during a time interval corresponding to the emission of γ rays and fast neutrons.

To examine γ spectra, we made use of a single crystal spectrometer ⁽¹⁰⁾. The crystals were of NaI, Tl activated, or of Anthracene, whose linearity has been tested within a large energy range. The crystals were used with a RCA 5819 phototube connected to a conventional amplifying circuit, which contained the above mentioned locking circuit, and finally a 99 channel pulse analyzer ⁽¹¹⁾.

3. - Experimental apparatus.

a) A schematic representation of the experimental apparatus is given in fig. 1.

Vessels containing target, water and phototube were of Aluminium, whose neutron capture cross section is low: consequently few γ rays are emitted from this metal.

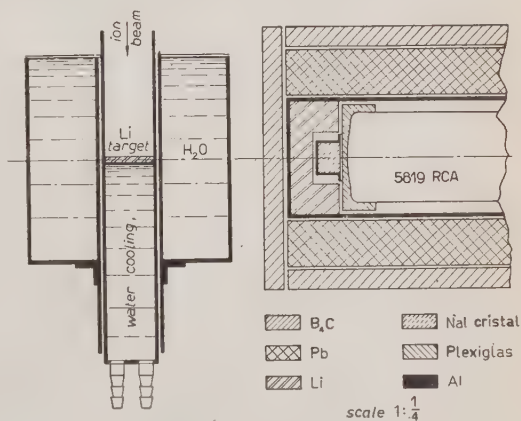


Fig. 1. - Experimental assembly.

⁽⁹⁾ E. GATTI, G. PERONA and A. PERSANO: *Nuovo Cimento*, **10**, 80 (1953).

⁽¹⁰⁾ A. BRACCI, U. FACCHINI and A. MALVICINI: *Nuovo Cimento*, **9**, 1237 (1952).

⁽¹¹⁾ E. GATTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 655 (1950).

The crystal was shielded by a lead cylinder about 3 cm thick in order to eliminate almost completely the X rays produced by high voltage generator, and partially the γ rays emitted in neutron capture processes in the surrounding materials.

Lead itself was a source of γ rays because of inelastic scattering reactions induced by fast neutrons, but such reactions happened only during the interval of the operation of locking circuit and were consequently of no importance.

Activation caused by slow neutron capture in the NaI crystal was minimized by Lithium and B₂C shields. Lithium was chosen because the reaction ${}^6\text{Li}(n, \alpha){}^3\text{H}$ produces no γ rays and the well known γ line from ${}^{10}\text{B}(n, \alpha){}^7\text{Li}^*$ did not distort the general behaviour of γ spectra in the energy region we were mostly interested in, and was sometimes useful to energy calibration of the spectrometer.

The vessel containing water was a 12 cm cube so that water interposed between the fast neutron source and the crystal was about 6 cm thick: in these conditions water represented a rather satisfactory distributed source of rays.

b) Because the γ rays source had linear dimensions comparable with Compton mean free path of the same radiations, it turned out to be necessary to make sure by means of preliminary measurements that the causes of distortion of γ spectra were not so important as to compromise the possibility of a correct interpretation of results. Consequently we studied the shape of some spectra of γ rays from ${}^{60}\text{Co}$ (1.17 and 1.33 MeV) and ${}^{137}\text{Cs}$ (0.67 MeV) under the following conditions.

Water containing vessels of different sizes similar in shape to the vessel we used during the measurements, were interposed between the ${}^{137}\text{Cs}$ source and the crystal; ${}^{60}\text{Co}$ source was dissolved into different volumes of water in order to obtain an extended γ source.

Experimental apparatus was comparable and in some cases somewhat unfavourable in comparison with those we made use of in the remaining measurements. The negligible distortions observed showed us that the 12 cm cube of water was not so large as to produce any remarkable distortion in the expected γ rays spectra.

c) The effective mean life of slow neutrons in water was measured by means of a thin layer BN + ZnS scintillation detector ⁽¹²⁾, used together with a RCA 5819 phototube. The detector was placed in contact with a wall of the cubic vessel containing water, which had in its center the pulsed neutron source. Because the cross section of ${}^{10}\text{B}(n, \alpha){}^7\text{Li}^*$ reaction follows the well

⁽¹²⁾ E. GATTI, E. GERMAGNOLI, A. PERSANO and E. ZIMMER: *Nuovo Cimento*, **9**, 1012 (1952).

known law

$$\sigma(v) = \frac{\sigma_0 v_0}{v},$$

(where $\sigma(v)$ and σ_0 are the boron capture cross sections and v and v_0 neutron velocities), the detector, when exposed to the outgoing neutron flux, will measure the density of slow neutrons near the surface of the medium. The decrease of neutron density near the surface corresponds with good approximation to the decrease of neutron density within the medium.

The parameters influencing the rate of decrease of neutron density, when

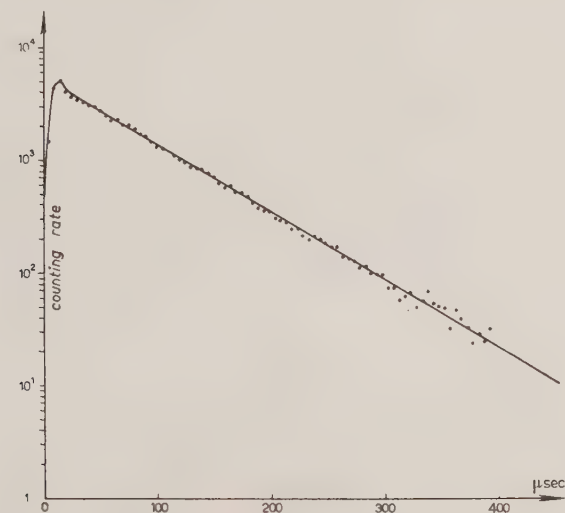


Fig. 2. - Time dependence of neutron density at the surface of the water vessel.

source term has vanished, are the structure and the size of the medium and the capture and scattering cross sections of its different materials. An exponential curve representing the time dependence of neutron density was obtained by means of a time-of-flight spectrometer⁽¹³⁾, which was used simply as a delay meter. This curve is given in fig. 2 and a neutron mean life of 71.7 μ s was deduced from it. This value is suitable for our purposes.

d) During the whole run of measurements of γ rays spectrum, we made use of an ion pulse of 10 μ s length. This was also the duration of fast neutrons and γ rays pulse, whose effect had to be eliminated. The above mentioned

(13) E. GATTI: *R.S.I.*, to be published in May 1953.

circuit locked the amplifying and recording chain during a $15\ \mu\text{s}$ interval from the starting of every ion current pulse; such an interval is larger than the total pulse duration, and is sufficiently short to cause only a small reduction of the intensity of the effect under investigation. The pulses were repeated each

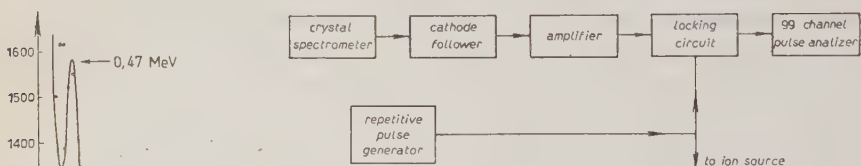


Fig. 3. - Electronic assembly.

$150\ \mu\text{s}$. A block diagram of the whole circuit is given in fig. 3.

e) The background, in our experimental apparatus, was made up of γ rays emitted from surrounding materials due to slow neutron capture and to activation produced by neutron capture in Iodine (Na did not have a noteworthy influence owing to its small capture cross-section).

Beta spectrum from Iodine has a maximum energy of about 2 MeV and it is continuous in shape; its effect on the counting rate therefore was not so important as to change the shape and the position of γ spectra; consequently it was not necessary to measure and subtract it. This conclusion is supported

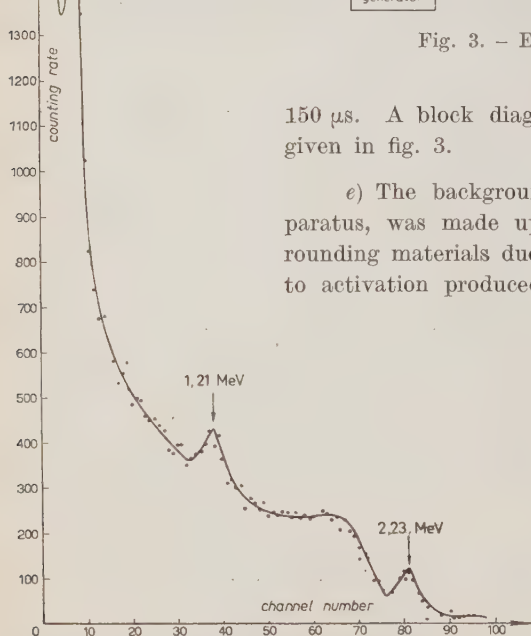


Fig. 4. - Spectrum of γ rays from $^1\text{P}(n, \gamma)^2\text{D}$ reaction with an NaI crystal. $E_\gamma = 2.23\ \text{MeV}$; pair production peak at $E_\gamma - 2mc^2 = 1.21\ \text{MeV}$; the peak at $0.47\ \text{MeV}$ is due to γ from $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}^*$ reaction.

by the agreement between results obtained with NaI and Anthracene crystals, as in the latter case there was no activation background.

4. - Results and conclusions.

A spectrum of γ rays produced in $^1\text{P}(n, \gamma)^2\text{D}$ reaction is represented in fig. 4. Such a spectrum was obtained with a NaI crystal. Photoelectric peak

and Compton edge may be observed and are to be ascribed to 2.23 MeV line. The maximum near 1.2 MeV is due to pair production in the crystal. The peak near 0.5 MeV is produced by γ rays emitted by excited Li^7 level in $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}^*$ reaction. The low energy distribution is due to activation in Iodine and to capture γ rays from surrounding materials, as discussed above.

Spectrum given in fig. 5 was obtained with an

Antracene crystal; in this case only Compton effect is important and only Compton electron distribution is therefore present.

Because in the obtained spectra no evidence can be found of γ lines

observed by NAKAGAWA, we tried to evaluate the sensitivity of our method. It was done by adding to γ radiations some other γ lines of known intensities and energies and by comparing the obtained results with the above reported γ spectra. To illustrate such a set of measurements, two spectra are given in fig. 6 and 7.

The former one was obtained with a NaI crystal after adding to the water source a ^{137}Cs source (0.67 MeV). In the latter we made use of an Antracene crystal and of a ^{22}Na source (1.28 MeV charac-

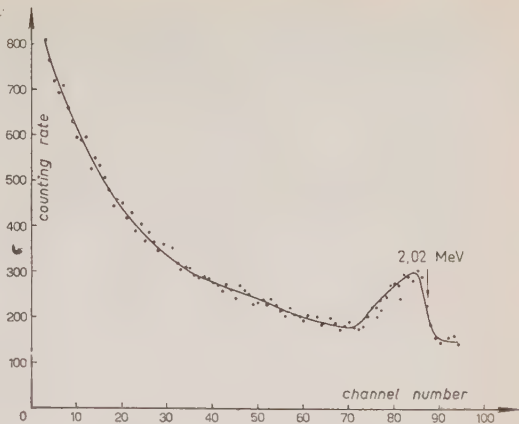


Fig. 5. - Spectrum of γ rays from $^1\text{P}(n, \gamma)^2\text{D}$ reaction with an Antracene crystal; the Compton edge at $2.02 \text{ MeV} = E_\gamma / (1 + mc^2/E_\gamma)$.

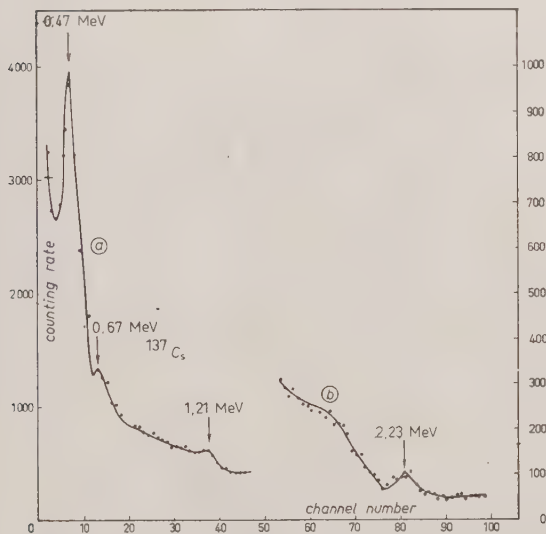


Fig. 6. - Spectrum as in fig. 4 plus the γ rays of ^{137}Cs (photopeak at 0.67 MeV). (a) left scale; (b) right scale.

teristic line); Anthracene was used instead of NaI in order to avoid photoelectric peak of 1.28 MeV line of ^{22}Na being superposed on the maximum due to pair effect by 2.23 MeV line emitted by Deuterium.

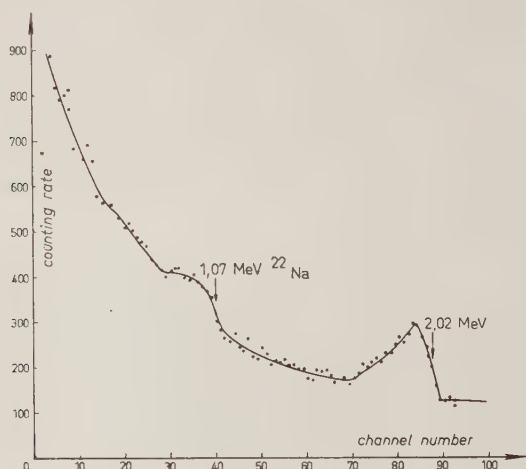


Fig. 7. - Spectrum as in fig. 5 plus the γ rays of ^{22}Na (the Compton edge at 1.07 MeV).

Both sources were situated in a fixed position near the detecting device, and their intensities, relative to 2.23 MeV line, were calibrated by obtaining their spectral distributions separately with a NaI crystal and comparing the areas below their photoelectric peaks with that below the photoelectric peak of 2.23 MeV line.

During the comparison the neutron flux was monitored by a BF_3 proportional neutron counter.

Having taken into account the dependence of photoelectric cross section on the energy of γ rays, we obtained the following approximate intensity ratios:

^{137}Cs source	0.2
^{22}Na source	0.3
$^1\text{P}(n, \gamma) ^2\text{D}$ source	1

It can be inferred from the shape of the observed spectra that in the reaction $\text{P} + \text{N} \rightarrow \text{D} + \gamma$ no γ line less energetical than 2.23 MeV is emitted, with larger probability than $\sim 20\%$ of the probability of transition to ground level of deuteron.

About the experimental method here developed, it can be noted that the use of a pulsed neutron source in connection with a locking circuit gives the possibility, when effects produced by slow neutrons must be considered, of eliminating a large fraction of the background, due to γ rays and fast neutrons which is associated with the neutron source.

We wish to thank Professors G. BOLLA, P. CALDIROLA and G. SALVINI for their stimulating discussions.

RIASSUNTO

Lo spettro dei raggi γ emessi nella reazione $N + P \rightarrow D + \gamma$ è stato studiato con uno spettrometro a cristallo e una sorgente impulsata di neutroni. I risultati ottenuti indicano che, entro i limiti di sensibilità del metodo di misura, nessuna riga di raggi γ di energia inferiore all'energia di legame del deutone (2.23 MeV) viene emessa: questo risultato non conferma l'esistenza di uno stato legato del sistema protone-neutrone, dedotta da NAKAGAWA.

The Grain Density and the Process of Track Formation in Nuclear Emulsions (*).

M. DELLA CORTE, M. RAMAT and L. RONCHI jr.

Istituto di Fisica dell'Università - Arcetri, Firenze

(ricevuto il 21 Maggio 1953)

PART II.

GRAIN DENSITY AND ENERGY LOSS

Summary. — The method described in paper I for the evaluation of π (the probability that a grain be impressioned) has been applied to ~ 50 tracks, observed in Ilford G5 Plates and belonging to identifiable particles of a given range. Experimental data have been plotted versus energy loss and compared with the expression given by P. DEMERS. It is recognized that some modification of the theory is required to account for the results. In fact, it is shown that the discrepancies can be made to disappear if the effect of the electron recombination inside the grain is suitably taken into account.

In Part I of this paper (¹), we proposed a new scheme for the process by which an ionizing particle produces a track in a nuclear emulsion. Despite the complexity of such a phenomenon, experimental results allow us to infer that our scheme may be considered correct, at least as a first approximation. We have shown (¹) how it becomes possible to deduce the value of π , probability that a grain be impressioned, from the number of gaps and their total length, determined along a given section of the track.

(*) This paper is part of a program of work supported by I.N.F.N., Sezione di Roma.

(¹) M. DELLA CORTE, M. RAMAT and L. RONCHI jr.: *Nuovo Cimento*, **10**, 509 (1953).

In this second Part, we shall consider the relation between π and the energy loss, dE/dR , of the particle that has produced the track. The importance of such a relation lies, not only in its bearing upon the theory dealing with the formation of a latent image, but also in its practical application to all those cases when grain density is one of the experimental data used for the identification of particles. The advantage of this method is particularly noticeable for high values of the grain density.

1. - Relation between π and energy loss.

It is a well established fact, that the process by which a latent image is formed in a grain that has been traversed by an ionizing particle, is strictly related to the number of electrons produced throughout the grain itself. If $(dE/dR)_{\text{AgBr}}$ is the energy loss per unit length in the silver bromide, and ε the average energy required to produce a secondary electron, the total number of electrons generated in a given length l is

$$x(l) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{dE}{dR} \right)_{\text{AgBr}} \cdot l.$$

In the following numerical evaluations we have assumed for ε the value obtained by K. ALAN YAMAKAWA ⁽²⁾ ($\varepsilon = 5.8$ eV).

It is generally assumed that for energy losses which do not exceed the minimum value by a factor ~ 3 , the relation between grain density and energy loss is one of direct proportionality. Experimental data appear to confirm this law all the more closely, the lesser the energy loss, and the lower the sensitivity of the emulsion. It is obvious, however, that as the energy loss increases, it is necessary to assume for dE/dR a limiting value, above which such a law can no longer be considered applicable; furthermore, for a given emulsion, this limiting value is related to the degree of development, in a way by no means easy to determine.

A number of other empirical or semi-empirical formulas have been proposed to cover a wider range of energy losses; all such formulas contain a certain number of arbitrary constants, whose values can be determined only « a posteriori », as they depend on the degree of development and on the type of emulsion.

Of particular interest is the attempt made by P. DEMERS ⁽³⁾, as it is based on very simple assumptions, that appear to be wholly justifiable. It is pre-

⁽²⁾ K. ALAN YAMAKAWA: *Phys. Rev.*, **82**, 522 (1951).

⁽³⁾ P. DEMERS: *Can. Journ. Res.*, A **25**, 233 (1947).

cisely the formula given by P. DEMERS which we now propose to discuss, and to compare with our experimental data.

The assumptions on which Demers' calculations are based, can be summarized in the following three points:

1) The undeveloped emulsion is composed of a number of spherical grains, distributed at random.

2) All these grains have equal diameter.

3) The probability that a grain be impressed, when a particle traverses it for a certain length l , depends on the total number $x(l)$ of the electrons produced throughout the grain itself. This probability is given by

$$\pi_l = 1 - e^{-\alpha x(l)},$$

where α is a constant, characteristic of the type of emulsion. Simple geometrical considerations, which take into account the random distribution of the grains, lead to the following expression for the average value of this probability

$$(1) \quad \pi = 1 - \frac{2}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda})$$

where $\lambda = \alpha x_0$ ($x_0 = x(d)$, d = grain diameter).

Recent microelectronic measurements by G. BARONI and C. CASTAGNOLI ⁽⁴⁾ on Ilford G.5 emulsions, have confirmed the reliability of assumptions 1) and 2).

Formula (1), however, does not appear to be fully confirmed by experimental results ⁽⁵⁾ nor could a good agreement be obtained with our own data, in which π has been evaluated by the new method proposed in Part I (see § 4).

It seems clear, therefore, that hypothesis 3) should be modified; actually such an assumption does not take into account recombination effects, which, in our opinion, cannot be neglected « a priori », especially when very high energy losses are involved.

Consequently, we thought it worth while to develop a suitable modification of hypothesis 3), in which such a recombination effect received due consideration.

⁽⁴⁾ G. BARONI and C. CASTAGNOLI: *Nuovo Cimento*, **7**, 394 (1950).

⁽⁵⁾ P. JANSSENS and M. HUYBRECHTS: *Bull. du Centre de Phys. Nucl. Bruxelles*, n. 29 (Avril 1951).

2. - Number of electrons "effective" in the formation of the latent image.

The rate of recombination can be evaluated from the following simple considerations:

Let us suppose that a particle traverses a certain grain, and let l be its path inside the grain. The manifold processes of ionization will occur within a small volume, surrounding the particle's trajectory, and which we can assume to be cylindrical, of radius r .

We must take into account three possible processes:

1) Recombination of electrons with positive ions, with formation of the initial aggregates.

2) Combination of electrons with interstitial Ag^+ ions, and formation of Ag atoms, which constitute an internal latent image.

3) Activation of superficial developing centers (traps), and hence formation of an external latent image.

Only the first of these three processes renders the electrons ineffective.

Within the cylinder under consideration, the number of free electrons will decrease with time, as a result of: *a*) recombination processes, *b*) diffusion out of the cylinder, *c*) processes 2) and 3). If $x(t)$ is the number of electrons within the cylinder at a time t , the contribution to the rate of its decrease due to processes *b*) and *c*) can be expressed by a term proportional to x , say, ax . The number of effective electrons at the time t is just

$$(2) \quad y(t) = \int_0^t ax \, dt.$$

The contribution to the rate of decrease of x , due to process *a*), is a term proportional to x , and to the number of «vacant places» ($x + y$). We have therefore

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = -K(x + y)x - ax.$$

The value we are interested in is $y(\infty)$, i.e., the total number of effective electrons, as this is the value to be introduced in 1) for x_0 . An asymptotic solution of equations 2) and 3) can be obtained from the relation (see Appendix)

$$(4) \quad \frac{K}{a} x_0 = \frac{-\ln \eta}{\eta},$$

where $\eta = y(\infty)/x_0$ gives the «efficiency» of the process.

TABLE I.

$\left(\frac{dE}{dR}\right)$ MeV/g cm ⁻²	Plate I ($K = 2.78$)					Plate II ($K = 4.42$)					Plate III ($K = 3.85$)				
	n	$\left(\frac{dE}{dR}\right)$	π	p	n	$\left(\frac{dE}{dR}\right)$	π	p	n	$\left(\frac{dE}{dR}\right)$	π	p	n	$\left(\frac{dE}{dR}\right)$	π
2-3	—	—	—	—	34	2.35	0.087	0.271	—	—	—	—	34	2.35	0.087
3-4	—	—	—	—	1	3.9	0.133	0.438	—	—	—	—	1	3.9	0.133
4-5	1	4.5	0.166	0.410	3	4.5	0.142	0.457	—	—	—	—	4	4.5	0.148
5-6	2	5.55	0.188	0.460	3	5.4	0.184	0.572	4	5.65	0.194	0.578	9	5.54	0.189
6-7	1	6.6	0.212	0.497	1	6.4	0.214	0.622	5	6.5	0.223	0.613	7	6.5	0.220
7-8	3	7.55	0.258	0.560	3	7.4	0.237	0.675	4	7.55	0.260	0.679	10	7.51	0.253
8-9	5	8.28	0.263	0.581	4	8.45	0.251	0.742	4	8.55	0.278	0.723	13	8.42	0.264
9-10	4	9.45	0.301	0.640	2	9.4	0.319	0.796	2	9.07	0.288	0.719	8	9.34	0.302
10-11	3	10.6	0.334	0.677	7	10.35	0.301	0.809	5	10.3	0.301	0.746	15	10.40	0.308
11-12	3	11.6	0.339	0.694	5	11.5	0.311	0.813	1	11.5	0.312	0.826	9	11.55	0.320
12-13	1	12.7	0.361	0.710	3	12.2	0.344	0.845	4	12.2	0.343	0.807	8	12.25	0.346
13-14	4	13.25	0.364	0.731	3	13.4	0.348	0.835	3	13.6	0.390	0.840	10	13.4	0.367
14-15	3	14.5	0.397	0.753	0	—	—	—	2	14.5	0.407	0.858	5	14.5	0.401
15-17	3	16.2	0.441	0.791	4	15.3	0.389	0.868	4	15.45	0.398	0.854	11	15.6	0.406
17-19	5	18.2	0.467	0.799	5	17	0.388	0.882	4	17.8	0.413	0.881	14	17.65	0.423
19-21	2	20.15	0.437	0.804	4	20.05	0.420	0.921	1	19	0.458	0.891	7	19.9	0.430
21-23	4	21.5	0.450	0.826	0	—	—	—	4	21.35	0.448	0.887	8	21.4	0.449
23-25	4	23.8	0.494	0.842	4	23	0.475	0.918	3	23.8	0.466	0.914	11	23.5	0.479
25-27	2	25.65	0.506	0.862	0	—	—	—	2	25.5	0.456	0.920	4	25.57	0.481

From this relation, it is possible to plot the function $y(\infty) = f(x_0)$, once a numerical value has been attributed to the ratio K/a .

3. - Experimental results.

In order to check the validity of 1), we have carried out a series of measurements on ~ 50 tracks, chosen on three Ilford G.5 plates, and due to particles whose identity could be considered practically certain. Three plates were examined ⁽⁶⁾:

Plate I (400 μ) exposed to the cosmic radiation at 3500 m a.s.l.

Plate II (400 μ) exposed to artificial π^- mesons of 70 MeV.

Plate III (600 μ) exposed to artificial π^- mesons at the end of their range.

Most of the tracks were due to mesons ending in the emulsion (primaries of σ stars, $\pi \rightarrow \mu$ processes and ρ mesons); a few had been produced by particles ending in the emulsion identifiable as protons, and a certain number by π^- mesons of ~ 70 MeV.

The tracks had widely different ranges (from a few hundred to a few thousand μ); each was subdivided into sections such that the increase of energy loss in all sections not too close to the end of the range was about 1 MeV $g^{-1} cm^2$. In no case, however, did it by far exceed this values. Only those sections of track whose dip was $\leq 10^\circ$ were considered suitable for our measurements.

Measurements were carried out very carefully under a Koristka microscope (immersion objective $\times 100$, drum micrometric ocular $\times 13$).

For each section, we counted the number of gaps and measured their length, and thus determined π and p values by applying the method described in Part I. For tracks terminating in the emulsion, the rate of energy loss corresponding to each section was evaluated by means of the range-energy loss curves given by H. L. BRADT, M. F. KAPLON and P. PETERS ⁽⁷⁾.

For mesons of 70 MeV, we evaluated $dE/dR = 2.35$ MeV $g^{-1} cm^2$.

Results are shown in Table I and fig. 1. The π and p values for the various sections of track are collected in 19 groups corresponding to 19 different ranges of the ratio dE/dR . The number of sections pertaining to each group is given in column 2 for plate I. In columns 3, 4 and 5 are tabulated the average values of dE/dR , π and p , respectively. The corresponding values for plates II and III are given in columns 6-13. Average values for the three plates are given in columns 14-16.

⁽⁶⁾ Plates II and III have been kindly provided by Prof. G. BERNARDINI.

⁽⁷⁾ H. L. BRADT, M. F. KAPLAN and B. PETERS: *Helv. Phys. Acta.*, **23**, 24 (1950).

In the first place we note that, while the p values appear to be notably different for the three plates (fig. 1), the π values corresponding to a given energy loss are instead appreciably the same. This result finds its straight-

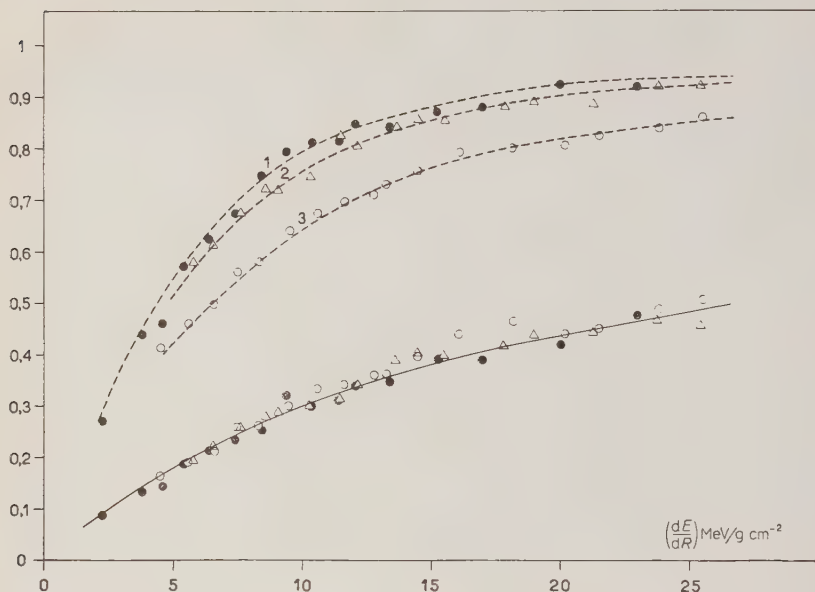


Fig. 1. — p and π versus dE/dR . 1, 2, 3 Experimental curves for p ; full line, calculated curve for π . Data represent average values of π and p : \circ Plate I; \bullet Plate II; \triangle Plate III.

forward explanation in our scheme, owing to the different degree of development of the three plates: in point of fact, the three average values of K (see Part I) are 2.78, 3.85 and 4.42, respectively. The intrinsic consistency of our π values is a further confirmation of the validity of our scheme.

We must bear in mind, however, that if along each section of track the variation of energy loss must be kept within limits sufficiently narrow, as the energy of the particle becomes increasingly low (i.e., the values of dE/dR increasingly high), we are faced with the problem of working on sections of rapidly diminishing length. At the same time, the number of gaps per unit length of track falls off, while their size decreases, so that the fluctuations become more and more important, and the average value less and less significant.

From a practical point of view, we must also note that tracks of the type of particles we were mainly concerned with, show a marked scattering near

the end of their range, so that it is difficult to find sections sufficiently parallel to the plane of the emulsion.

4. - Experimental check of the relation between π and energy loss.

A comparison between expression (1) and our experimental data can be carried out in the following manner:

Once the π values are known, it becomes possible to deduce from (1) the corresponding λ values. We shall call these values λ_{exp} .

On the other hand, $\lambda = \alpha x_0$ (if no correction is introduced to take into account the recombination effect). If (1) is suitable for representing experimental results, we ought to find $\lambda_{\text{exp}}/x_0 = \alpha$ (constant). Now, x_0 can be determined from the corresponding dE/dR values.

In Table II we give the x_0 values for each range of dE/dR and the ratios λ_{exp}/x_0 .

TABLE II.

$\left(\frac{dE}{dR}\right)$ MeV g ⁻¹ cm ²	x_0	π	λ_{exp}	$\frac{\lambda_{\text{exp}}}{x_0} \cdot 10^3$	$\frac{\lambda_{\text{exp}}}{y(\infty)} \cdot 10^3$	η
2.35	40.1	0.087	0.138	3.44	3.69	0.93
3.9	66.6	0.133	0.215	3.23	3.63	0.89
4.5	76.8	0.148	0.245	3.19	3.65	0.87
5.54	94.6	0.189	0.318	3.36	3.96	0.85
6.5	111.-	0.220	0.380	3.42	4.12	0.83
7.51	128.2	0.253	0.445	3.47	4.26	0.82
8.42	143.7	0.264	0.469	3.26	4.09	0.80
9.34	159.4	0.302	0.556	3.49	4.47	0.78
10.40	177.5	0.308	0.568	3.20	4.20	0.76
11.55	197.2	0.320	0.596	3.02	4.07	0.74
12.25	209.1	0.346	0.660	3.16	4.30	0.73
13.4	228.7	0.367	0.712	3.11	4.34	0.72
14.5	247.5	0.401	0.801	3.24	4.61	0.70
15.6	266.3	0.406	0.815	3.06	4.44	0.69
17.65	301.3	0.423	0.867	2.88	4.32	0.67
19.9	339.7	0.430	0.890	2.62	4.07	0.64
21.4	356.3	0.449	0.940	2.57	4.07	0.63
23.5	401.1	0.479	1.03	2.57	4.20	0.61
25.57	436.5	0.481	1.05	2.41	4.05	0.59

We note that λ_{exp}/x_0 does not remain constant, but decreases with increasing dE/dR .

In fig. 2 we have plotted our experimental π points. The dotted line represents Demers' formula for $\alpha = 3.01 \cdot 10^{-3}$ (average value of λ_{exp}/x_0). As is readily seen, the discrepancy between our experimental data and Demers' relation is quite appreciable.

We now propose to show that a much better agreement can be obtained if the recombination effect is taken into account.

To do this, it is necessary to substitute the $y(\infty)$ values for the corresponding x_0 ; we must therefore attribute a numerical value to the constant K/a .

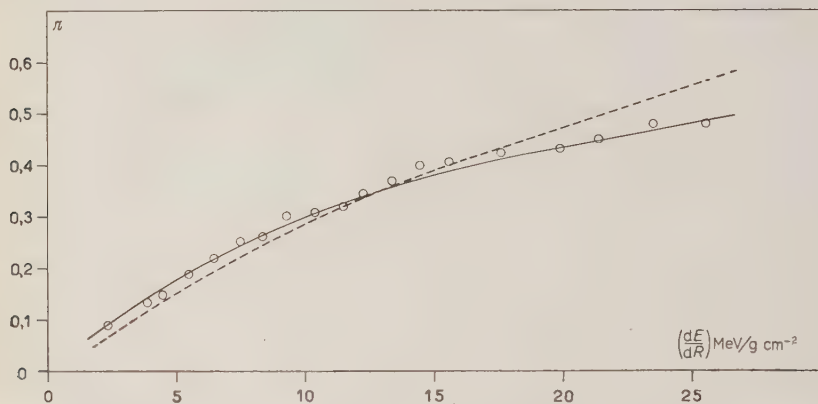


Fig. 2. — π versus dR/dE . Dotted line: Demers' formula. Full line: Demers' formula corrected for recombination effect. \circ Experimental average values.

By trial and error we have found that the value of K/a which gives the best fit with experimental data is $2 \cdot 10^{-3}$. Accordingly, the efficiency of electrons, effective for the latent image formation, varies between 98% and 60% when the energy loss increases from the minimum value up to 15 times this minimum. In Table 2, column 6, we give the values of $\lambda_{\text{exp}}/y(\infty)$ evaluated for the above numerical value of K/a .

In fig. 2 (full line) is plotted Demers' formula corrected for the recombination effect.

We see that $\lambda_{\text{exp}}/y(\infty)$ remains quite constant, and that the agreement between the experimental values of π and the corrected Demers' formula is now appreciably much closer.

An exact computation of the parameter K/a is no simple matter; it is possible, however to give its order of magnitude.

The term $Kx(x+y)$ of (3) represents the number of electrons whose recombination occurs during the interval dt ; now, for a single recombination

to take place, it is necessary that the electron under consideration pass at a distance less than a certain limiting value from one of the recombination centers. We can thus define a recombination cross section, σ .

During the interval dt , the x electrons will sweep with their cross sections across a volume $\sigma xv dt$ (v , average velocity of the electrons); the number of recombination centers which fall within this volume is $\sigma xv(x+y)/l\pi r^2 dt$ (l , range of the particle inside the grain). Therefore

$$Kx(x+y)dt = \sigma xv \frac{x+y}{l\pi r^2} dt,$$

$$K = \frac{\sigma v}{l\pi r^2}.$$

If we assume, as a rough approximation, $\sigma \sim r^2$ (r , atomic length unit)

$$K = \frac{v}{l\pi}.$$

The constant a is given by

$$a = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt}.$$

If ϱ is the electron density within the cylinder of radius r and height l , at any time t , then

$$x = \pi r^2 l \varrho.$$

If we now make the further assumption that the electrons are moving normally to the track of the particle, the number of electrons that leave the given volume during the interval dt is

$$dx = 2\pi r l v dt.$$

Substituting this value in the expression for a , we find

$$a = \frac{2v}{r},$$

and therefore

$$\frac{K}{a} = \frac{r}{2\pi l}.$$

As $r \sim 10^{-8}$ cm, and $l \sim 10^{-5}$ cm, K/a will be of the order of 10^{-3} . Such a value of K/a is consistent with the one previously determined ($2 \cdot 10^{-3}$).

It should be noted, however, that in the above considerations it has been implicitly assumed that all the energy transferred by the ionizing particle to the secondary electrons is dissipated within the grain itself.

Actually, for a better approximation to the truth, it would be necessary to take into account also the fact that a fraction of the energy is lost in collisions sufficiently close for the secondary electron to escape from the grain where it has been produced, and to dissipate its energy in adjacent grains. An effect of this kind cannot be considered negligible in the case of very fast particles; thus $\lambda_{\text{exp}}/y(\infty)$ diminishes for small values of dE/dR . In point of fact, from our experimental data it would appear that the $\lambda_{\text{exp}}/y(\infty)$ values are too low for energy losses $< 5 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$.

Conclusions.

The experimental results comprised in Table I confirm the validity of the scheme for the process of track formation in a nuclear emulsion proposed in Part I of this paper.

The probability π that a grain be impressioned, which can be determined experimentally from the average grain diameter d_0 , the total number of gaps r , and the total length L_0 of same, ($\pi = d_0(r/L_0)$) is independent from the degree of development, provided the emulsion is not unduly underdeveloped.

The expression of P. DEMERS

$$\pi = 1 - \frac{2}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}),$$

with $\lambda = 4.18 \cdot 10^{-3} y(\infty)$, where $y(\infty)$ is the number of effective electrons produced within the grain by the traversing particle, evaluated by taking into account the recombination effect, is quite well confirmed by experimental results.

The probability π is a much more reliable datum than «grain density», as it is usually defined. It is possible to use such a datum, which is independent from the degree of development, up to values of dE/dR as high as ~ 15 times the minimum value (in Ilford G.5 emulsions).

We are greatly indebted to Prof. S. FRANCHETTI, Director of this Institute, for having suggested the calculations relative to the recombination effect. We also wish to thank Prof. M. MANDÒ for his precious advice and for many helpful discussions during the course of the present research.

APPENDIX

Evaluation of the number of effective electrons.

The number of electrons, effective for the formation of the latent image, is given by the asymptotic solution, $y(\infty)$, of the set of equations

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t ax \, dt, \\ x' = -Kx(x + y) - ax, \end{cases}$$

with the boundary conditions

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \\ y' = ax_0 \end{cases} \quad \text{for } t \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} y = y(\infty) \\ y' = 0 \end{cases} \quad \text{for } t \rightarrow \infty.$$

By writing $z = y/a$, this set of equations becomes

$$\begin{cases} x' = -Kx(x + az) - ax \\ z' = x. \end{cases}$$

By substituting the second equation in the first, and setting $z' = p$

$$\frac{dp}{dz} + Kp + Kaz + a = 0,$$

with

$$u = Kp + Kaz + a,$$

we have

$$\frac{du}{dz} = K(a - u),$$

$$u = a + Ae^{-Kz},$$

which give

$$\frac{K}{a} y' + Ky = Ae^{-(K/a)y}.$$

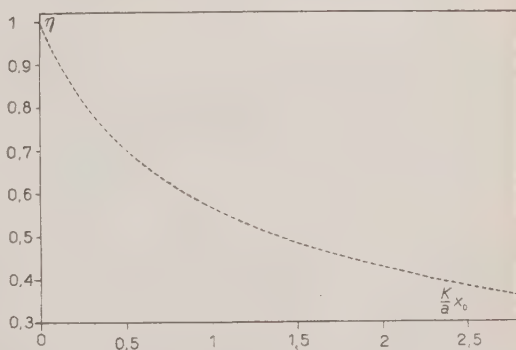


Fig. 3. - η versus $(K/a)x_0$.

The boundary conditions, for $t \rightarrow 0$, give $A = Kx_0$ and thence, for $t \rightarrow \infty$,

$$Ky(\infty) = Kx_0 e^{-(k/a)\eta(\infty)}.$$

Let η be the efficiency in effective electrons ($\eta = y(\infty)/x_0$) then

$$\frac{K}{a} x_0 = - \frac{\ln \eta}{\eta};$$

η versus $(K/a)x_0$ is plotted in fig. 3.

RIASSUNTO

Nella prima parte di questa nota è stato esposto un metodo di determinazione della probabilità di impressionamento π di un granulo da parte di una particella ionizzante, metodo che entro larghi limiti è indipendente dal grado di sviluppo della lastra. Sono state eseguite numerose misure di π su vari punti di tracce di particelle note ed è stata studiata la relazione fra π e la perdita di energia. I dati sperimentali sono stati confrontati con l'espressione di π dedotta da P. DEMERS, senza trovare un accordo soddisfacente. Il disaccordo viene attribuito ad un effetto di ricombinazione degli elettroni prodotti in un granulo, effetto che porta ad una diminuzione del numero di elettroni efficaci alla formazione dell'immagine latente. Viene proposto un metodo per stimare quantitativamente questo effetto. Tenendo conto di ciò l'accordo fra l'esperienza e l'espressione di P. DEMERS risulta assai buono.

Apparecchiatura per lo studio di fenomeni elettrodi- nelle celle elettrolitiche

C. GUERCI

Istituto di Elettrochimica del Politecnico - Milano

G. TAGLIAFERRI e L. TERRA

Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano

(ricevuto il 29 Aprile 1953)

Riassunto — Viene descritta un'apparecchiatura, interamente elettro-
nica, realizzata per lo studio del comportamento di elettrodi sottoposti
ad impulsi (periodici e non) di corrente. L'andamento della tensione
sull'elettrodo di prelievo viene osservato sullo schermo di un tubo a raggi
catodici, e registrato fotograficamente; un opportuno circuito consente
di ritardare o anticipare l'inizio dell'osservazione oscillografica rispetto
all'istante di chiusura o apertura del circuito di corrente della cella elettro-
litica. L'apparecchiatura offre soddisfacenti prestazioni in un ampio
campo di variabilità delle condizioni di esperienza; particolare cura è
stata dedicata ad assicurare che le determinazioni volute avvengano in
condizioni di volta in volta ben definite.

Introduzione.

Nello studio dei fenomeni elettrodi in una cella elettrolitica, è sovente
richiesta la conoscenza, nelle varie condizioni di esperienza, della sovratensione
reale d'elettrodo rispetto alle condizioni d'abbandono. Questa grandezza (che
indicheremo, come d'uso, con $\Delta_i E$) dipende da molti fattori: ma in special
modo è funzione della densità di corrente e del tempo. Il suo valore si può
ricavare come differenza tra la tensione relativa d'elettrodo E_i e la tensione
relativa d'elettrodo allo stato di abbandono E_a .

$$\Delta_i E = E_i - E_a ;$$

E_i ed E_a sono quantità misurabili ai capi della pila tensiometrica dell'elet-
trodo in esame ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ R. PIONTELLI: *Compt. Rend. de la II^{ème} Réunion du Comité de Thermodyna-
mique et de Cinétique électrochimiques* (Milano, 1950), pag. 79.

Ricerche sull'andamento di J, E in funzione del tempo sono state effettuate da vari autori, con tecniche diverse. Così, alcuni hanno utilizzato un galvanometro registratore (KNOBEL, BOWDEN e RIDEAL; BAARS; FERGUSON) ⁽²⁾, altri un oscillografo con tubo a raggi catodici (PEARSON e BUTLER; NEWBERY; PIONTELLI e GUERCI) ⁽³⁾, per registrare le variazioni nel tempo della tensione relativa d'elettrodo agli istanti di chiusura e di apertura della corrente attraverso la cella. Le variazioni di corrente, singole o ripetute periodicamente, venivano effettuate mediante interruttori meccanici. Per lo stesso scopo, sono stati impiegati recentemente anche interruttori elettronici (HICKLING; LEBBINK *et al.*; SCHULDINER e WHITE; STACOPOULOS *et al.*) ⁽⁴⁾.

In questa nota ci proponiamo di descrivere l'apparecchiatura da noi realizzata per lo studio del comportamento di elettrodi sottoposti ad impulsi di corrente di diversa intensità, durata e frequenza di ripetizione. Il complesso, che è interamente elettronico, è stato progettato in modo da offrire soddisfacenti prestazioni in un ampio campo di variabilità delle condizioni di esperienza.

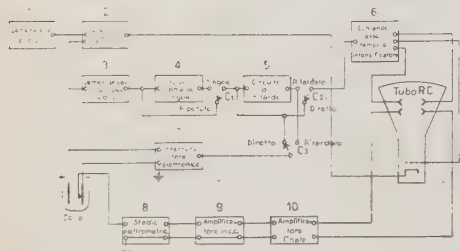


Fig. 1. - Schema d'insieme dell'apparecchiatura.

fenomeni elettrochimici della cella. Gli altri componenti fondamentali dell'apparecchiatura sono:

a) un generatore pilota (n. 1) che determina la frequenza del ciclo di funzionamento dell'intero dispositivo nel caso di «funzionamento ripetuto»; da questo generatore si ottengono anche i segnali di tempo per riconoscere la velocità di deflessione orizzontale della traccia del tubo a raggi catodici;

b) un circuito per il comando della deflessione orizzontale (n. 6), sincronizzato con il generatore pilota;

c) un interruttore elettronico (n. 7), con chiusura ed apertura sincronizzate con il dispositivo di deflessione orizzontale: questo interruttore alimenta a corrente costante la cella;

⁽²⁾ M. KNOBEL: *Journ. Am. Chem. Soc.*, **46**, 2613 (1924); F. P. BOWDEN e E. K. RIDEAL: *Proc. Roy. Soc. A* **120**, 59 (1928); E. BAARS: *Sitzber. Ges. Beförder. Naturw. Marburg*, **63**, 213 (1928); A. L. FERGUSON: *Disc. Faraday Soc.*, **1**, 50 (1947).

⁽³⁾ J. O. PEARSON e J. A. V. BUTLER: *Trans. Faraday Soc.*, **34**, 1163 (1938); E. NEWBERY: *Trans. Faraday Soc.*, **43**, 127 (1947); R. PIONTELLI e C. GUERCI: op. cit. in ⁽¹⁾, pag. 149.

⁽⁴⁾ A. HICKLING: *Trans. Faraday Soc.*, **33**, 1540 (1937) e **37**, 450 (1941); F. J. LEBBINK, J. WEIDEMA e W. G. BURGERS: *Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas* (1949), pag. 68; S. SCHULDINER e R. E. WHITE: *Journ. Electr. Soc.*, **97**, 433 (1950); D. STACOPOULOS, E. YEAGER e F. HOVORKA: *Journ. Electr. Soc.*, **98**, 69 (1951).

d) un amplificatore in corrente continua (n. 9) che comanda la deflessione verticale della traccia, e il cui segnale d'ingresso è prelevato dagli elettrodi di misura della cella.

Il funzionamento dell'insieme degli elementi indicati nella fig. 1 può essere descritto, sommariamente, nel modo seguente. Il segnale sinusoidale di bassa frequenza ($20 \div 20\,000$ Hz) prodotto dal generatore pilota (n. 1) viene applicato al generatore delle marche di tempo (n. 2), che lo trasforma in un segnale di egual frequenza, di forma rettangolare, di breve durata, e di segno negativo. L'immissione di questo segnale sul catodo del tubo a raggi catodici produce dei punti di maggior luminosità sulla traccia: la loro spaziatura corrisponde a intervalli di tempo pari al periodo del segnale pilota. La frequenza dello stesso segnale pilota viene demoltiplicata per un fattore fisso (regolabile) nel demoltiplicatore aperiodico (n. 3): ciò allo scopo di poter ottenere il sincronismo tra le marche di tempo e lo sgancio del circuito di comando della deflessione orizzontale, per tutti i valori previsti per il rapporto tra il periodo del pilota e la durata della deflessione stessa. Il segnale di uscita del demoltiplicatore viene applicato al circuito di comando dell'asse dei tempi (n. 6); ed a seconda della posizione del commutatore C_1 , sono possibili due collegamenti:

— direttamente dall'uscita del demoltiplicatore: si ha allora una deflessione periodica, con frequenza dipendente dalla frequenza del pilota e dal fattore di demoltiplicazione usato; oppure

— attraverso il circuito di comando singolo (n. 4), il quale, azionato da un comando manuale a pulsante, permette di ottenere una sola deflessione, sincronizzata però col generatore pilota e con le marche di tempo (che risultano quindi sempre nella stessa posizione anche ripetendo lo sgancio manuale).

Dipendentemente poi dalla posizione del commutatore C_2 , è possibile far partire l'asse dei tempi immediatamente all'arrivo del segnale di comando, oppure con un ritardo regolabile tra alcuni microsecondi e alcuni decimi di secondo, per mezzo del circuito di ritardo (n. 5).

Il medesimo segnale di comando ritardato o no (commutatore C_3), aziona l'interruttore elettronico (n. 7). Combinando opportunamente le posizioni dei commutatori C_2 e C_3 , si rende possibile esaminare i fenomeni che interessano nelle condizioni di osservazione oscillografica di volta in volta più favorevoli. L'interruttore elettronico alimenta a corrente costante la cella di misura; la tensione agli elettrodi di misura è amplificata da un amplificatore con accoppiamento in corrente continua (n. 9), preceduto da uno stadio elettrometrico d'ingresso (n. 8), e seguito da un amplificatore finale (n. 10) che comanda la deflessione verticale del fascetto elettronico del tubo a raggi catodici. Il gruppo amplificatore ha la particolarità di non derivare corrente dagli elettrodi di misura della cella.

Descrizione dei singoli elementi costituenti l'apparecchiatura.

1. *Il generatore pilota.* — È un normale generatore di bassa frequenza ($20 \div 20\,000$ Hz), capace di fornire in uscita un segnale sinusoidale di almeno 15-20 V di ampiezza. Noi abbiamo impiegato un generatore commerciale (mod. 198 della casa Hickok).

zione sia approssimativamente multipla di quella del generatore del dente di sega: si ha in questo caso una divisione automatica della frequenza del segnale sincronizzante. Tuttavia, il massimo fattore di divisione usabile con sicurezza senza jitter e senza perdita di sincronismo è dell'ordine di 20-30, il che limita a 20-30 il numero di marche che si possono far comparire sulla traccia; volendone un numero maggiore, occorre sincronizzare il generatore del dente di sega su un segnale ottenuto demoltiplicando la frequenza delle marche. Poichè quest'ultima varia nel nostro caso entro limiti abbastanza estesi (da 20 Hz a 20 kHz), conviene usare un demoltiplicatore aperiodico, del tipo scala.

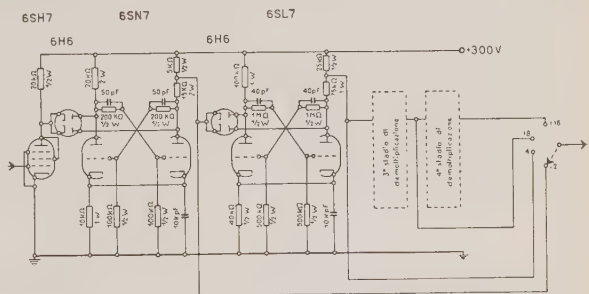


Fig. 3. - Il demoltiplicatore aperiodico di frequenza.

gato una scala di Higinbotham, con fattori di divisione 2, 4, 8 e 16. Così è possibile ottenere fino a 160 marche sulla traccia, con buona sicurezza. Inoltre l'introduzione della scala consente di diminuire la frequenza di ripetizione, nel funzionamento ripetuto, sino al valore di circa 1 Hz, limitando di conseguenza a casi abbastanza estremi la necessità di ricorrere al comando singolo, che ha lo svantaggio di richiedere ogni volta l'intervento dell'operatore. Nella fig. 3 è riportato lo schema del demoltiplicatore.

4. *Il circuito per il comando singolo.* — Il segnale di uscita del demoltiplicatore può, a seconda della posizione del commutatore C_1 , o comandare direttamente i successivi stadi

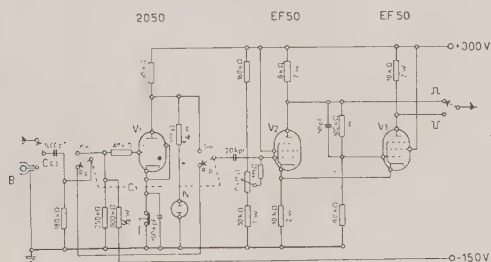


Fig. 4. — Il circuito per il comando singolo.

salvo i ritardi interni costanti. Pertanto, ripetendo il comando singolo, le marche risultano nella stessa posizione rispetto all'immagine che compare sullo schermo del tubo, in quanto anche l'immagine — come si vedrà in seguito — risulta sincronizzata col generatore delle marche. Lo spegnimento del thyatron, per ritornare nelle condizioni iniziali, viene effettuato aprendo per un istante

6. *Il circuito per il comando della deflessione orizzontale.* — Questo circuito (fig. 6) è del tipo descritto da FITCH e TITTERTON⁽⁶⁾, eccezion fatta per il dispositivo di linearizzazione a ripetitore catodico (cosiddetto « boot-strap ») che qui è sostituito dal generatore lineare di SAYRE (V_5 , V_6)⁽⁷⁾. Questo generatore, come il SAYRE stesso ha messo in evidenza, offre il vantaggio, nei con-

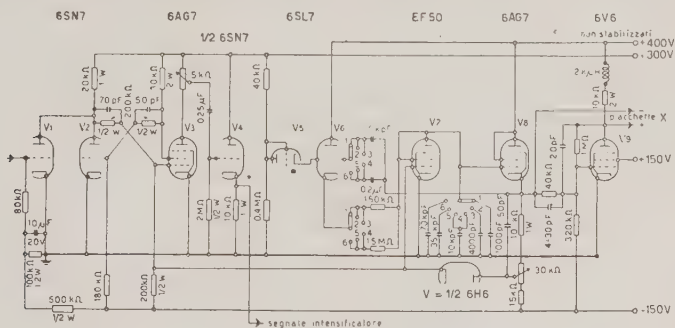


Fig. 6. - Il circuito per la deflessione orizzontale.

fronti del boot-strap, di un minor tempo morto tra la fine di un ciclo e l'inizio del successivo; inoltre, anche per basse velocità di deflessione del fascetto catodico, non richiede l'uso di elevate capacità di ricarica.

Il segnale di intensificazione, positivo, è formato dal multivibratore (V_2 , V_3), e applicato alla griglia controllo del tubo a raggi catodici attraverso il ripetitore catodico V_4 . La durata del segnale di intensificazione è uguale a quella del segnale di deflessione, cosicchè la traccia di compare sullo schermo del tubo soltanto durante la deflessione. Il comando di quest'ultima è simmetrico, come nell'oscilloscopio da laboratorio di FITCH e TITTERTON ⁽⁶⁾.

7.1. L'interruttore elettronico. — Per soddisfare le esigenze del tipo di sperimentazione per il quale la presente apparecchiatura è stata progettata, questo elemento doveva possedere i seguenti requisiti:

(i) chiudere o aprire il circuito della cella, immettendo nella stessa corrente costante a circuito chiuso, e di intensità regolabile da ~ 1 a ~ 40 mA; si richiede inoltre che l'intervallo di tempo tra una chiusura del circuito e la successiva apertura (o viceversa) possa essere variato da qualche decimillesimo di secondo a parecchi secondi;

(ii) effettuare la transizione da aperto a chiuso, e viceversa, in un tempo minore di 10^{-4} s;

(iii) limitare la corrente in cella, a circuito aperto, ad intensità minori di 10^{-7} A: questo affinché gli elettrodi possano essere considerati sicuramente a riposo;

(⁶) V. L. FITCH e E. W. TITTERTON: *Rev. Scient. Instr.*, **18**, 821 (1947).

(7) D. SAYRE: *Electronics*, **23**, n. 7, pag. 171 (1950).

(iv) consentire l'effettuazione di registrazioni sia «anodiche» (lato positivo della cella a terra), che «catodiche» (lato negativo della cella a terra).

Per il punto (i) siamo ricorsi ad un sistema bistabile, tipo scala di demoltiplicazione per due. Questa soluzione si presenta come ben rispondente allo scopo, in quanto i due stati di equilibrio del sistema, che si fan corrispondere a corrente aperta o chiusa in cella, si susseguono ad intervalli di tempo determinati dalla frequenza di ripetizione degli impulsi di comando all'ingresso dell'interruttore elettronico. Si dispone così di una vasta gamma per le durate degli impulsi di corrente nella cella: nel caso estremo del comando singolo si ha addirittura una chiusura o un'apertura definitiva del circuito di corrente. In conclusione, l'elemento di scala comandato dal generatore pilota evita vantaggiosamente la necessità di introdurre nell'apparecchiatura un apposito generatore di impulsi rettangolari.

Per i punti (ii) e (iii) bisogna osservare che la richiesta di un'intensità di corrente residua in cella $< 10^{-7}$ A rende abbastanza difficile l'ottenimento di fronti molto ripidi per gli impulsi di corrente. Infatti, quando si voglia scendere al disotto del limite di qualche μ A di corrente residua, non è più possibile impiegare un circuito utilizzando normali tubi a vuoto, laddove l'uso di un tale circuito consentirebbe tempi di apertura e chiusura anche inferiori a 10^{-6} - 10^{-7} s. Desiderando una soluzione abbastanza semplice, noi abbiamo impiegato un tubo al neon nel circuito di corrente della cella: quando il circuito è aperto, la d.d.p. ai capi di questo tubo è mantenuta così bassa che il gas è praticamente deionizzato, e di conseguenza il circuito è efficacemente interrotto. Così è soddisfatta l'esigenza (iii). S'intende però che i tempi di apertura e di chiusura non possono essere inferiori ai tempi di deionizzazione e di ionizzazione del gas; questi ultimi dipendono poi dal valore dell'intensità di corrente. In pratica, il nostro dispositivo apre o chiude entro alcune decine di microsecondi, il che è ritenuto sufficiente per soddisfare il punto (ii).

Per il punto (iv), mentre per le registrazioni catodiche non si incontrano difficoltà, per quelle anodiche invece la situazione è complicata dalla circostanza che mettendo a terra l'anodo le capacità parassite dei circuiti di alimentazione derivano corrente nel circuito della cella. Abbiamo ovviato all'inconveniente predisponendo un'alimentazione a pile per le registrazioni anodiche (e alimentando con accumulatori i filamenti dei tubi interessati), naturalmente solo per quella parte dell'interruttore elettronico che è direttamente collegata con il circuito della cella.

Occorre poi tener presente che nell'inserzione anodica anche il segnale di comando che entra nell'interruttore si chiude a terra attraverso il circuito della cella: è necessario quindi che questo segnale sia reso, per quanto possibile, di breve durata e di piccola ampiezza. Lo stadio di ingresso dell'interruttore elettronico tiene conto di queste ultime esigenze.

7.2. Il circuito dell'interruttore elettronico (fig. 7). — Il segnale d'ingresso per l'interruttore elettronico proviene dalla catena descritta nei numeri 1-5, e può essere quindi singolo o ripetuto; diretto o ritardato. Il segnale passa attraverso un discriminatore di Schmitt (V_1 , V_2), ed entra quindi nel tubo V_3 , che lo forma negativo e di breve durata ($\sim 2 \mu$ s) in placea: quest'impulso è usato per comandare lo stadio bistabile (V_4 , V_5). L'uscita dell'elemento di

scala è collegato al limitatore a diodo V_6 che determina il livello della tensione di griglia della coppia di tubi V_7 . Questa coppia costituisce un ripetitore catodico, sulla cui placca sono inseriti, in serie, il tubo al neon N e la cella elettrolitica. Per le note proprietà del ripetitore catodico, la corrente di placca di V_7 dipende essenzialmente dai valori della tensione di griglia e della resistenza

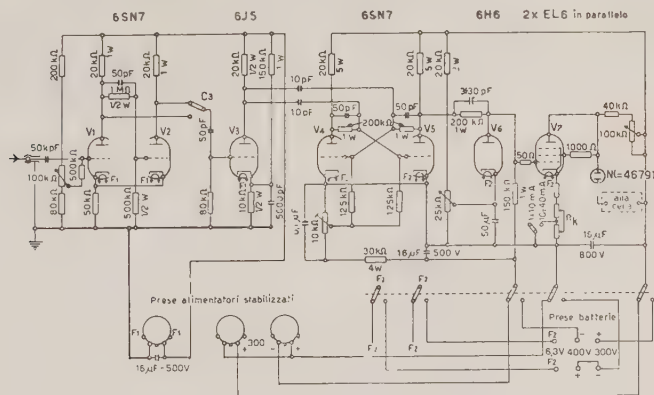


Fig. 7. - Il circuito dell'interruttore elettronico.

catodica: di conseguenza, per un determinato livello della tensione di griglia di V_7 , la corrente attraverso la cella è praticamente indipendente dalla tensione ai capi della stessa, e può essere regolata per mezzo del potenziometro catodico R_k . La presenza del tubo al neon non altera sensibilmente la situazione, dato l'alto valore dell'impedenza equivalente sulla piacca di V_7 , pur determinando quando viene acceso un salto di 70-80 V nella tensione an-

dica; cosicchè, una volta acceso il tubo al neon, il circuito del ripetitore catodico assicura l'alimentazione a corrente costante della cella.

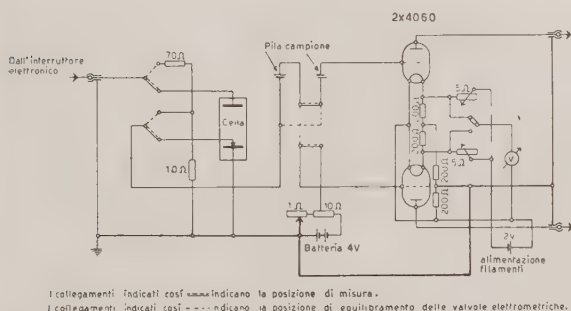


Fig. 8. — Lo stadio elettrometrico d'ingresso al gruppo amplificatore.

rente continua, si è impiegato un ingresso elettrometrico. Detto ingresso utilizza due tubi Philips 4060, uno dei quali è collegato con l'elettrodo di pre-

8. Lo stadio elettrometrico d'ingresso al gruppo amplificatore (fig. 8). — Allo scopo di evitare che la cella sia caricata con la corrente di griglia dello stadio di ingresso dell'amplificatore in cor-

di circa 3 cm per un segnale d'ingresso di 10 mV di ampiezza, ed è costante entro ± 2 db fino ad almeno 100 kHz. La limitazione della risposta di questo amplificatore è imputabile principalmente all'uso dei tubi tipo 807: non si è tentato di migliorare la risposta alle frequenze più elevate, sembrando sufficiente agli scopi dell'apparecchiatura il risultato raggiunto.

11. *I comandi del tubo a raggi catodici* (fig. 11). — Il tubo è un DB 16/2 Philips, a deflessione elettrostatica. È stata predisposta un'alimentazione a radiofrequenza per il filamento, allo scopo di eliminare l'inconveniente delle varia-

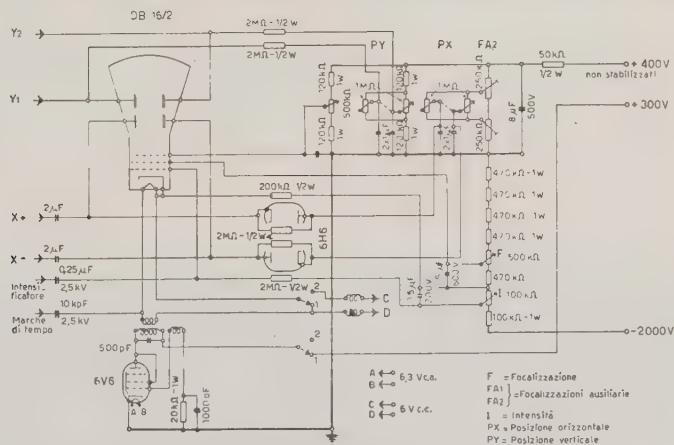


Fig. 11. — I comandi del tubo a raggi catodici.

zioni di luminosità che si possono manifestare alla frequenza della rete di distribuzione; è anche prevista una alimentazione in corrente continua per misure nelle quali si richieda una notevole definizione. I comandi degli spostamenti e della deflessione del fascetto elettronico sono simmetrici. Per la correzione dell'astigmatismo sono impiegate due focalizzazioni ausiliarie (*).

Conclusione.

L'apparecchiatura descritta in questa nota è in funzione da più di un anno all'Istituto di Elettrochimica del Politecnico di Milano. Il suo impiego si è dimostrato soddisfacente tanto nei riguardi della sicurezza di funzionamento che della riproducibilità dei risultati. Oscillogrammi tipici ottenuti nel corso

(⁹) Cfr. W. C. ELMORE e M. SANDS: *Electronics* (New York, 1949), pag. 282 e seguenti.

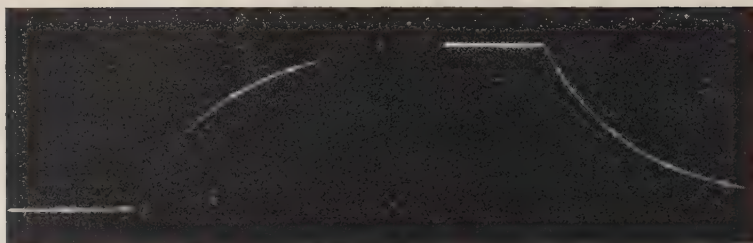


Fig. 12. - Registrazione *catodica* dell'andamento della tensione d'elettrodo di un campione di Zn, sottoposto ad un impulso *singolo* di corrente, in una soluzione di $\text{Zn}(\text{ClO}_4)_2$, 0,5M + HClO_4 , 0,1M in $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$, 20% M + H_2O , 80% M; $t = 52^\circ\text{C}$; densità di corrente 3 A/m²; intervallo tra le marche $5 \cdot 10^{-4}$ s. Oscillogramma di sinistra: registrazione alla chiusura del circuito di corrente; oscillogramma di destra: registrazione all'apertura.



Fig. 13. - Registrazione *anodica* dell'andamento della tensione d'elettrodo, nelle stesse condizioni della fig. 12.



Fig. 14. - Registrazione *anodica* dell'andamento della tensione d'elettrodo, nelle stesse condizioni della fig. 12, eccezion fatta per la densità di corrente, che qui ha il valore di 25 A/m².

delle registrazioni dei segnali che compaiono sullo schermo del tubo a raggi catodici, sono riprodotti nelle figure 12-14.

Per concludere, desideriamo richiamare brevemente alcune caratteristiche salienti del nostro apparato. (i) È stata tenuta presente in modo particolare la necessità che le misure vengano effettuate in condizioni sperimentali di volta in volta ben definite. A questo proposito gli elementi di maggior importanza sono l'interruttore elettronico e lo stadio elettrometrico all'ingresso del gruppo amplificatore; il primo consente di sottoporre l'elettrodo in esame ad impulsi (periodici e non) di corrente con tempi di chiusura e apertura del circuito di corrente inferiori a 10^{-4} s, ed intensità, durata e frequenza di ripetizione note e regolabili; il secondo disaccoppia il circuito della cella dal circuito di misura. (ii) In ciascuna delle condizioni di lavoro prescelte per l'elettrodo sotto misura è possibile registrare variazioni dell'ordine del mV o meno nella tensione d'elettrodo; l'osservazione oscillografica può avere inizio sia contemporaneamente, sia in anticipo o in ritardo rispetto alla chiusura o apertura del circuito di corrente della cella; per l'esame di fenomeni di diversa durata, sono disponibili varie velocità di spostamento orizzontale del fascio oscillografico, corrispondenti a durate di deflessione comprese tra 0,5 e 10^{-4} s.

Ringraziamo il prof. ROBERTO PIONTELLI per averci proposto la costruzione di un'apparecchiatura rispondente ad esigenze di ricerca nel campo dell'elettrochimica, e per averci messo a disposizione i mezzi necessari per la realizzazione del nostro progetto.

SUMMARY

An electronic circuitry has been developed with the purpose of enabling measurements to be made on electrode behaviour in electrolytic tanks. The electrode under consideration is submitted to current pulses of different intensity, length, and repetition rate; the pertinent potential is picked up by a suitable probe electrode and fed to an amplifier whose output drives a cathode ray oscillograph. The measuring circuit is decoupled from the tank current circuit by means of an electrometer stage; this, and other features (such as delaying, switching, and displaying units) that are included in the apparatus, improve the over-all performance and reliability.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

A New Single Channel Elementary Amplitude Discriminator.

E. GATTI

Laboratori CISE - Milano

F. PIVA

Istituto di Chimica Generale dell'Università - Padova

(ricevuto il 25 Maggio 1953)

Many descriptions about either single or multi-channel pulse analyzers appeared recently in the literature. Slow multi-channel analyzers ⁽¹⁾ ⁽²⁾ ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ seem to have reached a quite satisfactory degree of accuracy and reliability.

Single or multi-channel fast analyzers, operating by means of two or more independent simple voltage discriminators ⁽⁵⁾, are evidently affected, concerning either with design or with their operation characteristics, by the intrinsic uncertainty of voltage thresholds of about .1 V ⁽⁶⁾ of the already known simple voltage discriminators actually employed. The difficulty is generally avoided by

means of a window amplifier ⁽⁵⁾ gain, of the order of 10: the signal emerging from the window amplifier is applied to a set of voltage analyzers, which are so arranged as to have an interval of 5 V at least among their thresholds. Consequently the channels at the input look as large as .5 V, and the interval of 5 V between the thresholds of voltage discriminators is sufficient to achieve a reasonably good stability in channel width.

However, the behaviour of the window amplifier must meet a few severe requirements.

An elementary circuit is here suggested, which, by means of the non-independent introduction of two voltage thresholds, looks satisfactory in order to define a stable single channel.

This circuit is operating by means of a simple voltage discriminator to which the incoming square pulse is applied and further a pulse is added obtained by shaping and delaying the former one by means of linear stable passive networks.

The block diagram of the circuit is given in fig. 1.

⁽¹⁾ S. G. G. FRANK, O. R. FRISCH and G. G. SCARROT: *Phil. Mag.*, **42**, 603 (1951).

⁽²⁾ D. H. WILKINSON: *Proc. Cambridge Phil. Mag.*, **46**, 508 (1949).

⁽³⁾ E. GATTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 655 (1950).

⁽⁴⁾ G. W. HUTCHINSON and G. G. SCARROT: *Phil. Mag.*, **42**, 792 (1951).

⁽⁵⁾ A. B. VAN RENNES: *Nucleonics* (1952), July, pag. 20; August, pag. 22; September, pag. 32; October, pag. 50.

⁽⁶⁾ C. W. JOHNSTONE: *Nucleonics* (1953), January, pag. 36.

The delay-line should have a delay of $1/4$ of the length of squared input pulse and is connected at its end with a re-

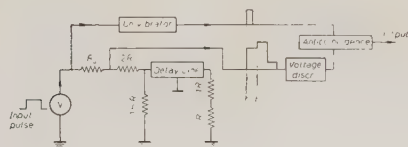


Fig. 1.

sistance larger than the characteristic resistance of the line. Consequently the pulse, at the input of the discriminator, is shaped as indicated in fig. 1.

The anticoincidence circuit locks the pulse at the discriminator output if the discriminator acts at $t = t_0$; the acting of the discriminator at $t = t_1$ characterizes on the contrary the circumstance that the pulse belongs to a channel lying between $V_s/(1+k)$ and V_s ; where V_s is the threshold voltage at the discriminator and k is the fraction of the pulse which is reflected by the delay line.

The circuit given in fig. 1 has been tested by means of pulses emerging from the following system: a NaI crystal, a photomultiplier, a cathode follower, a pulse shaping delay line (pulse width

$6 \mu s$) and an amplifier whose rise time is $.5 \mu s$.

The characteristic impedance of the lumped elements delay line of fig. 1 was 1000 ohm, the delay time $1.5 \mu s$. The channel width is naturally proportional to $(\Delta R_0/R_0)V_s$. The stability of a 1 V channel has proved itself to be better than 5 %.

This elementary circuit may be improved in order to enable the acceptance of a wide range of pulse shapes and rise times, and seems to be suited to be a basic component of single or multi-channels precision analyzers; the improved circuit should be provided with the following additional elements:

1) A gate circuit preceded by a pulse lengthener to make the shape of the pulse at the discriminator independent from input pulse shape.

2) An «inspector» circuit (7) in order to avoid the interference of an eventual second pulse during the operation time.

We wish to thank Dr. E. GERMAGNOLI and Mr. C. COTTINI for their aid during the testing measurements.

(7) A. B. RENNES: *Nucleonics* (1952), October, p. 52.

Su una coppia di stelle vicine correlate (*).

G. LOVERA

Istituto di Fisica dell'Università - Modena
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino

L. BARBANTI SILVA, C. BONACINI, C. DE PIETRI, R. PERILLI FEDELI e A. ROVERI

Istituto di Fisica dell'Università - Modena

(ricevuto il 1° Giugno 1953)

In una lastra Ilford G5 (spessore 600 μ), esposta per circa 8 ore all'altezza di 22 km, in uno dei lanci effettuati a Cagliari nell'estate del 1952, è stato trovato un evento costituito da due stelle i cui centri, distanti appena 2 μ , appaiono congiunti da una breve traccia (fig. 1). La stella maggiore (A) è del tipo 13 + 1n, non compresa la corta traccia tra i due centri: la traccia relativistica *a* forma un angolo acuto con la verticale rivolta verso il basso, cioè ha un'orientazione non abituale per i primari. Astraendo dalla traccia relativistica, si può attribuire all'energia messa in gioco nella stella A, secondo i dati di BROWN e Coll. (1), un valore di circa 1200 MeV; se si comprende la traccia relativistica, e la si attribuisce ad un protone, l'energia risulta dell'ordine di 2 GeV.

La stella minore (B) consta di 4 rami, tutti neri, con le seguenti caratteristiche.

Stella B.

Ramo	Range (in μ)	densità granuli	energia cinetica (in MeV) per un protone
1	2 245	nera	23,6
2	> 192	nera	> 5,4
3	169	nera	5,0
4	> 262	nera	> 6,5

L'energia dei rami 2 e 4 non è determinabile direttamente; comunque, dal conteggio del numero di lacune di detti rami, l'energia delle corrispondenti particelle non dovrebbe superare quella della particella 1, posto che siano della stessa specie (cioè protoni, il che appare plausibile). L'energia visibile risulta perciò dell'ordine di 100 MeV, tenuto conto delle energie di legame.

Il centro della stella B è lievemente spostato rispetto alla traccia *a'*, appartenente alla stella A; il tratto tra i due centri appare inoltre notevolmente più grosso che non la traccia *a'*, sicchè deve essere occupato da un frammento, corto, che non è risolto rispetto alla traccia *a'*,

(*) Questo lavoro fa parte del programma di ricerche dell'I.N.F.N., Sezione di Torino.

(1) R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).

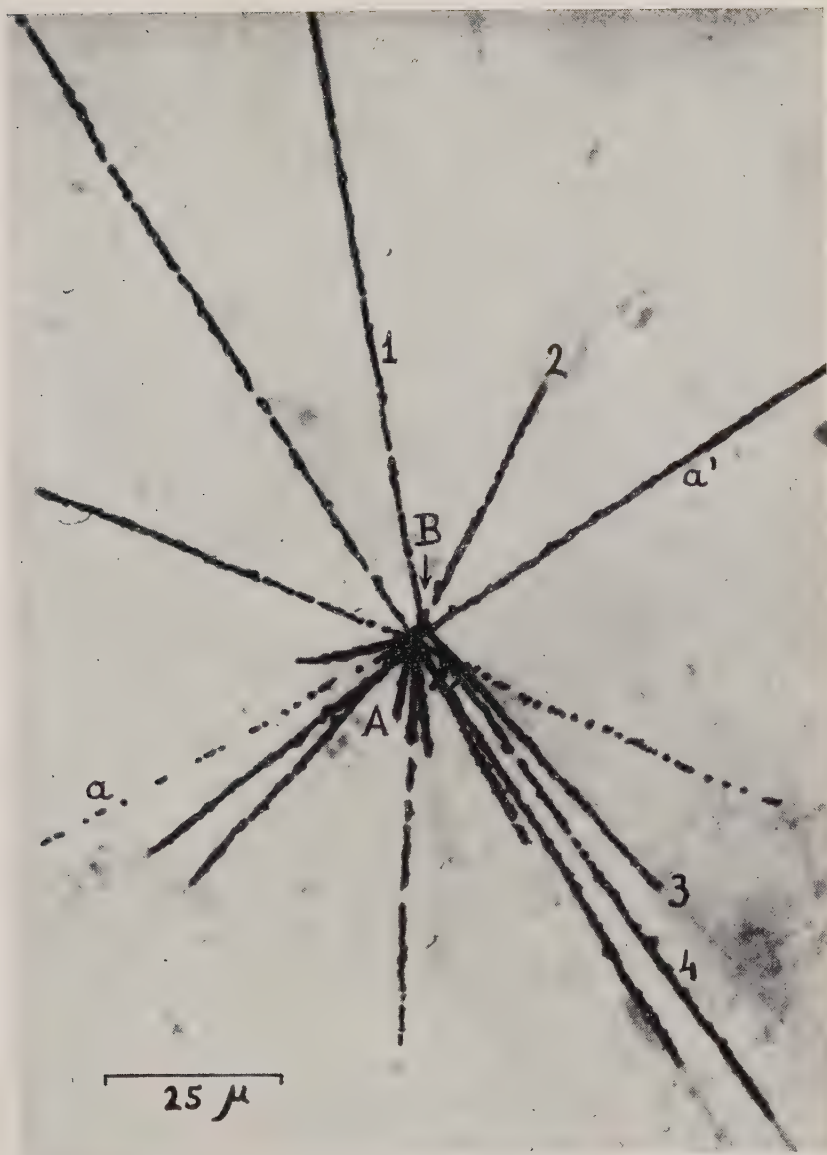


Fig. 1.

e non prosegue oltre il centro della stella *B*.

Di recente, sono stati segnalati ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ tre casi di stelle, a piccolo numero di rami, col centro situato all'estremità terminale di un frammento pesante proveniente da una stella maggiore, e, data l'estrema esiguità della probabilità valutata che si tratti di una coincidenza fortuita, l'evento è stato attribuito ad una disintegrazione ritardata del frammento pesante.

Nel presente caso, la situazione ener-

getica delle due stelle della coppia è non dissimile da quella di due dei casi succitati ⁽³⁾; però la traccia tra i due centri è troppo corta per poterla identificare. Si potrebbe trattare della frantumazione ritardata di un frammento pesante, o fermo, o ancora in moto con velocità modesta (i rami della stella *B* appaiono proiettati in avanti rispetto alla direzione dal centro di *A* a quello di *B*, ma formano con questa angoli piuttosto grandi); oppure della disintegrazione di un nucleo dell'emulsione in seguito ad un urto da parte di un frammento uscente da *A*, od alla cattura di un mesone pure prodotto in *A*: l'energia inerente al processo *B* non è incompatibile con quest'ultima ipotesi. È comunque eccezionale la vicinanza tra i due centri, e d'altro canto certe innegabili analogie con gli eventi descritti nelle note ⁽³⁾ ci inducono a segnalare anche il presente caso.

L'evento è stato osservato dal Dr. DE PIETRI.

⁽²⁾ U. CAMERINI, J. H. DAVIES, P. H. FOWLER, C. FRANZINETTI, H. MUIRHEAD, W. O. LOCK, D. H. PERKINS, e G. YEKUTIELI: *Phil. Mag.*, **42**, 1241 (1951).

⁽³⁾ M. DANYSZ e J. PNIEWSKI: *Phil. Mag.*, **44**, 348 (1953); D. A. TIDMAN, G. DAVIS, A. J. HERZ e R. M. TENNENT: *Phil. Mag.*, **44**, 350 (1953).

⁽⁴⁾ J. CRUSSARD e D. MORELLET: *Comptes Rendus*, **236**, 54 (1953).

Sullo scattering di particelle cariche da parte dei nuclei.

E. CLEMENTEL e A. COEN

Istituto di Fisica dell'Università - Padova

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 6 Giugno 1953)

La sezione d'urto differenziale per scattering di una particella carica di momento $p = \hbar k$ è data dalla nota espressione (1)

$$(1) \quad \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2 = \left| \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \{ \exp [2i(\eta_l + \delta_l)] - 1 \} P_l(\cos \vartheta) \right|^2,$$

dove η_l sono le fasi coulombiane, mentre δ_l sono le fasi legate al potenziale nucleare. Anche nel caso di particelle neutre ($\eta_l = 0$), il calcolo della $f(\vartheta)$ è complicato dal fatto che i nuclei si comportano come sfere parzialmente assorbenti, per cui η_l è una quantità complessa, del tipo cioè $\eta_l = \alpha_l + i\beta_l$. Per il calcolo di α_l e β_l si dovrebbe assegnare alla materia nucleare un coefficiente di assorbimento (2), oppure rappresentare il potenziale nucleare con un potenziale complesso (3).

Sempre nel caso di particelle neutre, nell'ipotesi estrema di un nucleo completamente assorbente (nucleo opaco), in cui $\delta_l = i\infty$ per $l < kR$ e $\delta_l = 0$ per $l > kR$, dove con R si è indicato il raggio del nucleo, se $kR \gg 1$ la sommatoria in (1) si può effettuare e porta alla formula di PLACZEK e BETHE (4)

$$(2) \quad |f(\vartheta)|^2 = \left| -\frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{kR} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 = R^2 \left\{ \frac{\mathcal{J}_1(kR\vartheta)}{\vartheta} \right\}^2,$$

valida per angoli non troppo grandi.

Vogliamo qui far vedere come nell'ipotesi del nucleo opaco, purchè sia $n(Z\hbar k) \gg 1$, la (1) si possa sommare anche trattandosi di particelle cariche, dove bisogna tener conto dell'effetto coulombiano per le onde che non « urtano »

(1) J. D. JACKSON e J. M. BLATT: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 77 (1950).

(2) S. FERNBACH, R. SERBER e T. B. TAYLOR: *Phys. Rev.*, **75**, 1352 (1949).

(3) S. PASTERNAK e H. S. SNYDER: *Phys. Rev.*, **80**, 921 (1951).

(4) G. PLACZEK e H. A. BETHE: *Phys. Rev.*, **57**, 1075 (1940); S. FLUGGE: *Erg. Ex. Naturwiss.*, **25**, 476 (1951).

il nucleo. Indicando con l_c il valore del momento angolare che separa nell'onda incidente le onde assorbite da quelle diffuse, dato in approssimazione semiclassica dalla ⁽⁵⁾

$$(3) \quad l_c = kR \left(1 - \frac{Ze^2}{ER} \right)^{1/2},$$

dove E è l'energia cinetica della particella, tenendo conto della $\sum (2l+1)P_l(\cos \vartheta) = 0$ ($\vartheta \neq 0$), dalla (1) segue

$$(4) \quad f(\vartheta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=l_c}^{\infty} (2l+1) \exp[2i\eta_l] P_l(\cos \vartheta).$$

Ad esempio, per protoni di 340 MeV nel caso del piombo ($R = 1,4 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$) si ha $n = 0,7$ ed $l_c \cong 33$.

Poichè ora

$$(5) \quad \eta_l = \arg \Gamma(1 + l + in) = \eta_0 + \sum_{i=1}^l \operatorname{arctg} \frac{n}{i},$$

per $n \gtrsim 1$ ed $l \gg 1$, la (5) si può scrivere ⁽⁶⁾

$$(6) \quad \eta_l \cong \eta_0 + n(\lg l + C) \simeq n \lg l,$$

con C costante di Eulero. Nella (6) si è tenuto conto che per $n \gtrsim 1$ è praticamente $\eta_0 = -nC$. Usando ancora la $P_l(\cos \vartheta) = \mathcal{J}_0(l\vartheta)$, valida per $l \gg 1$, ed angoli non troppo grandi, introducendo la (6) nella (4) è sostituendo la sommatoria su l con un integrale, si ottiene

$$(7) \quad f(\vartheta) = \frac{1}{ik} \int_{l_c}^{\infty} l^{2in+1} \mathcal{J}_0(l\vartheta) dl,$$

avendo trascurato 1 rispetto a $2l$. Con $y = l\vartheta$ si ha ancora

$$(8) \quad f(\vartheta) = \frac{1}{ik\vartheta^{2in+2}} \left\{ \int_0^{\infty} y^{2in} \mathcal{J}_0(y) dy - \int_0^{l_c\vartheta} y^{2in} \mathcal{J}_0(y) dy \right\}.$$

Calcolando il primo integrale ⁽⁷⁾, e trasformando il secondo mediante una integra-

⁽⁵⁾ C. J. MULLIN e E. GUTH: *Phys. Rev.*, **82**, 141 (1951).

⁽⁶⁾ E. JAHNKE e F. EMDE: *Tables of Functions* (New York, 1945), p. 19.

⁽⁷⁾ E. T. WHITTAKER e G. N. WATSON: *Modern Analysis* (Cambridge, 1935) p. 383.

zione per parti, tenendo conto della $y\mathcal{J}_0(y) = (d/dy)y\mathcal{J}_1(y)$, la (8) diventa

$$(9) \quad f(\vartheta) = \frac{1}{k\vartheta^2} \left\{ 2n \exp \left[i \left(2n \lg \frac{\vartheta}{2} + 2\eta_0 \right) \right] + l\vartheta \exp \left[i \left(2n \lg l - \frac{\pi}{2} \right) \right] \mathcal{J}_1(l_c\vartheta) - \right. \\ \left. - 2n \exp [-i2n \lg \vartheta] \int_0^{l_c\vartheta} y^{2in} \mathcal{J}_1(y) dy \right\}.$$

che è l'espressione cercata. Il primo termine a secondo membro dà il puro contributo coulombiano e prevale per piccoli angoli. Per particelle neutre, $\kappa = 0$, $\eta_0 = 0$ ed $l_c = kR$, per cui la $|f(\vartheta)|^2$ si riduce alla (2). La finzione del nucleo opaco, di cui ci siamo serviti per dedurre la (9), non è in genere realizzata nell'intervallo energetico in cui la (9) è applicabile; nondimeno nel caso di particelle cariche essa rappresenta un termine correttivo al calcolo della sezione d'urto differenziale fatto tenendo conto delle onde con $l \leq l_c$. Quest'ultimo contributo si potrebbe valutare usando, ad esempio, la (7) del lavoro di FERNBACH, SERBER e TAYLOR, modificata nello spirito della (3) e bloccando il potenziale coulombiano al valore assunto al bordo del nucleo, dato che per le onde che vi penetrano l'azione del potenziale nucleare prevale di gran lunga su quella del potenziale coulombiano, di cui pertanto non è essenziale dare l'andamento effettivo.

Sui « jets » di mesoni nelle emulsioni nucleari.

G. BERTOLINO, A. DEBENEDETTI, G. LOVERA (*) e M. VIGONE

*Istituto di Fisica dell'Università - Torino**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino*

(ricevuto il 15 Giugno 1953)

In un gruppo di lastre Ilford G5 (600 μ), esposte alla radiazione cosmica per alcune ore all'altezza di circa 22 km durante i lanci effettuati a Cagliari nell'estate 1952, sono stati osservati parecchi sciame di mesoni, sia senza tracce grige e nere, sia accompagnati da un numero molto modesto di dette tracce (« jets », secondo la denominazione data da DANIEL e coll. (1)).

Dei 23 sciame utilizzati nella presente statistica, 11 non hanno più di due tracce grige e nere complessivamente, ed i restanti non più di 5 (salvo un caso con 6); essi sono prodotti parte da primari di carica unitaria, e parte da primari neutri.

Per ciascuno di questi sciame, nell'ipotesi che i mesoni dello sciame siano prodotti in un solo atto di collisione nucleone-nucleone, è stata valutata l'energia del primario, nel sistema del baricentro dei due nucleoni che subiscono la colli-

sione dalla quale si origina lo sciame, mediante la formula (2) (3):

$$(1) \quad \frac{1}{\gamma_c} = \operatorname{tg} \vartheta_f \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{1-f},$$

dove γ_c è l'energia del primario, in unità di energia di riposo (Mc^2), e ϑ_f ; ϑ_{1-f} sono gli angoli di semiapertura dei coni che, nel sistema del laboratorio, contengono rispettivamente le frazioni f e $1-f$ delle particelle dello sciame.

Nella fig. 1 è riportato il numero N_{\pm} più probabile di mesoni carichi in ciascuno sciame ($N_{\pm} = N_s - 1$ secondo (2)) in funzione di γ_c ; analogamente a quanto è stato fatto da DILWORTH, GOLDSACK, HOANG e SCARSI (2) (3). I dati riportati sul diagramma possono dare un contributo alla statistica degli sciame di mesoni, particolarmente riguardo alla eventuale loro suddivisione in due gruppi:

(*) Istituto di Fisica dell'Università - Modena.

(1) R. R. DANIEL, J. H. DAVIES, J. H. MULVEYL e D. H. PERKINS: *Phil. Mag.*, **42**, 753 (1952).

(2) C. C. DILWORTH, S. GOLDSACK, TCHANG-FONG HOANG, e L. SCARSI: *Compt. Rend.*, **236**, 1551, (1953).

(3) TCHANG-FONG HOANG: *Journ. de Phys. et le Rad.* (in corso di stampa; siamo grati al Dr. HOANG per aver comunicato a questo Istituto i suoi risultati prima della pubblicazione).

uno caratterizzato da una dipendenza praticamente lineare della molteplicità dello sciame da γ_0 , e quindi dalla radice

dedotta da WATAGHIN ⁽⁴⁾ per grandi molteplicità nella sua teoria della produzione multipla, e con la teoria di

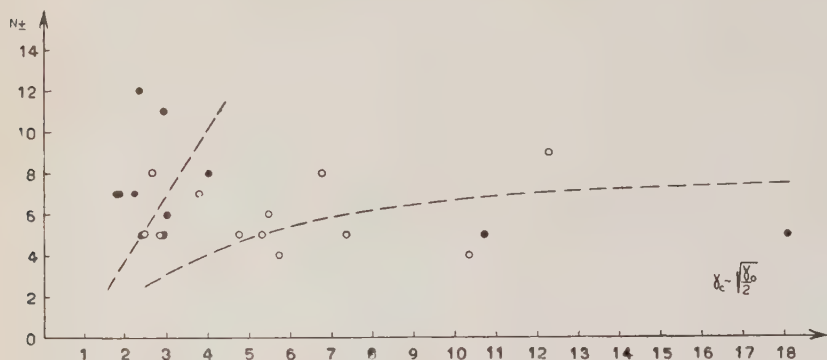


Fig. 1. — ● sciame con non più di 2 tracce grigie e nere; ○ sciame con 3-6 tracce grigie e nere.

quadrata dell'energia del primario nel sistema del laboratorio (γ_0), ed un altro nel quale l'accrescimento della molteplicità con γ_0 è assai più lento. Ci sembra notevole il fatto che la separazione in due gruppi, notata da DILWORTH, GOLDSACK, HOANG e SCARSI ⁽²⁾ ⁽³⁾, anche nel nostro caso si verifica soltanto per sciame con non più di due tracce grigie o nere.

L'andamento del primo gruppo sarebbe in accordo con la relazione tra numero di mesoni ed energia del primario

HEISENBERG ⁽⁵⁾; l'andamento del secondo gruppo pare piuttosto interpretabile secondo lo schema della teoria plurima.

Ulteriori misure sono in corso.

Ringraziamo il prof. G. WATAGHIN per averci proposto questo argomento, e per le utili discussioni e l'interessamento con cui ha seguito la presente ricerca.

⁽⁴⁾ G. WATAGHIN: *An. Ac. Bras. de Ciências* (Symposium 1941); *Phys. Rev.*, **74**, 975 (1948).

⁽⁵⁾ W. HEISENBERG: *Nature*, **146**, 65 (1949); *Zeits. f. Phys.*, **126**, 569 (1949).

A Perturbating Factor on the Kinetics of the Homogeneous Hydrogen Deuterium Exchange Reaction.

C. BOATO and G. CARERI

Istituto di Fisica dell'Università - Roma
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

A. CIMINO, E. MOLINARI and G. G. VOLPI

Istituto di Chimica Generale ed Inorganica dell'Università - Roma

(ricevuto il 18 Giugno 1953)

The thermal homogeneous exchange reaction $\text{H}_2 + \text{D}_2 \rightleftharpoons 2\text{HD}$ was investigated in 1935 by A. and L. FARKAS ⁽¹⁾. Comparison with the theoretical treatment ⁽²⁾ ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ however is not completely satisfactory. In view of the importance of this reaction, we thought of some interest to repeat these experiments using a Nier-type mass spectrometer for the gas analysis, instead of the thermal conductivity method previously used.

In 1951 further experiments on the kinetics of this reaction have been carried out by VAN MEERSCHE ⁽⁵⁾ in a different temperature range, and with results in good agreement with those obtained by A. and L. FARKAS. It is important to notice that VAN MEERSCHE observed a progressive increase in the rate of ex-

change, which becomes even 30 times larger at the end of some experiments. He attributed this effect to the diffusion of metal or impurities through the walls. A first set of runs showed that the same effect was present in our case: the permanence of the reaction vessel at high temperatures caused a regular increase of the rate of exchange, see table I. In both sets of measurements the temperature was 614 °C and the pressure 30 mm Hg; the time interval between the measurements was 10^m and the time interval between the two groups was 3 days. It was practically impossible to obtain reproducibility even after prolonged outgassing at 950 °C.

TABLE I. - HD% formed in 15^m.

set A	set B
7.25	14.1
9.35	16.8
11.30	22.0
13.15	27.3
16.30	32.2
—	36.3

⁽¹⁾ A. and L. FARKAS: *Proc. Roy. Soc.*, **152** A, 152 (1935).

⁽²⁾ J. O. HIRSCHFELDER, H. EYRING, and B. TOPLEY: *Journ. Chem. Phys.*, **4**, 170 (1936).

⁽³⁾ L. FARKAS and E. WIGNER: *Trans. Far. Soc.*, **32**, 708 (1936).

⁽⁴⁾ H. EYRING and M. POLANYI: *Zeits. Phys. Chem.*, **B 12**, 230 (1931).

⁽⁵⁾ M. VAN MEERSCHE: *Bull. Soc. Chim. Belg.*, **60**, 99 (1951).

Further purification of the gases through a palladium valve had no influence on this effect, pointing out that contamination was not occurring through the gases. An examination of the possible « impurities » whose diffusion might influence the rate, led us to the conclusion that diffusion of air can account for the observed increase of the reaction rate. Diffusion of air through quartz was investigated by BARRER⁽⁶⁾, whose results allow us to calculate that the amount of air diffused in our reaction vessel (volume 100 cm³, surface 150 cm², wall thickness 1 mm) in 15^m should give rise to a pressure of about 10⁻⁴ mm Hg at 600 °C, and 10⁻³ mm Hg at 900 °C. We have been able to make a rough check of these figures, measuring the amount of air diffused in 8 hrs at 900 °C, by means of a Pirani gauge. Air (or water) can have a serious catalytic effect on the rate of this reaction. Data of Table II show good evidence

TABLE II.

Initial mixture	Time (minutes)	exchange %
H ₂ + ₂ D ₂	15	15.0
H ₂ + ₂ D ₂ +3% air	15	93.2
H ₂ +D ₂ +5% water	30	98.8

for the influence of 3% air or 5% water added to the H₂-D₂ mixture; in all the experiments the temperature was 614 °C and the pressure 30 mm Hg.

We can now recall that A. and L. FARKAS in a different paper⁽⁷⁾ mention the fact that they were able to outgass a quartz vessel, which had been presumably saturated with hydrogen, until only less than 2·10⁻³ cm³/hr of gas were given off by the walls at 720 °C. They interpreted this amount as hydrogen tenaciously held by the quartz, but a calculation based on Barrer's data and on the geometrical dimensions of their vessel, shows that the amount of air diffused into the vessel is just about 2·10⁻³ cm³/hr at 720 °C.

In order to prevent air diffusion we enclosed our reaction vessel in a quartz jacket, in which a vacuum of 10⁻⁴ mm Hg was maintained. After careful, prolonged outgassing at 950 °C we have been able to get good reproducibility for the exchange rate. Data so far obtained, while confirming that packing of the reaction vessel with quartz capillaries do not affect appreciably the rate of exchange, bring evidence for definitely lower rates than those previously obtained by other authors.

A complete kinetic study of the reaction is now in progress and will be published in due time.

⁽⁶⁾ R. M. BARRER: *Journ. Chem. Soc.*, 378, (1934).

⁽⁷⁾ A. and L. FARKAS. *Trans. Far. Soc.*, 31, 821 (1935).

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

Progress in Nuclear Physics, vol. II.
Editor: O. R. FRISH, VIII-295 p.,
Pergamon Press Ltd, London 1952.

Annual Review of Nuclear Science,
vol. II. Editor: J. G. BECKERLEY,
x+429 p., Annual Review Inc.,
Starford, California 1953.

Tra le varie iniziative tendenti a facilitare l'informazione, in un mondo scientifico ormai invaso da migliaia di riviste molte delle quali assai difficilmente reperibili, una delle migliori consiste senza dubbio nel pubblicare ampi, documentati e aggiornati articoli di rassegna dovuti alla penna di specialisti dei singoli argomenti. Questo compito, che è stato per molti anni assolto per la fisica quasi esclusivamente dalla *Review of Modern Physics*, viene oggi affrontato in collaborazione, e quasi direi in concorrenza, da un numero sempre crescente di pubblicazioni periodiche di varie nazionalità, sicchè non è improbabile che tra non molto ci si venga a trovare, per ciò che riguarda lavori di inquadramento e messa a punto, in una situazione assai simile a quella che oggi si lamenta per i lavori originali di ricerca.

Ecco per esempio usciti, fianco a fianco, i secondi volumi dell'inglese *Progress in Nuclear Physics* (Editor O. R. FRISH) e dell'americana *Annual Review of Nuclear Science* (Editor J. G. BECKERLEY) rispettivamente con otto e se dici in generale buoni articoli di messa a punto su argomenti di attualità in fisica nucleare.

L'ampiezza del campo a disposizione ha per fortuna come conseguenza la quasi completa assenza di sovrapposizioni, in quanto dei due articoli sulla scissione, quello assai ampio di WHITEHOUSE sulla rivista inglese tratta il fenomeno in tutti i suoi aspetti, mentre il breve articolo di SPENCE e FORD sulla americana si limita a considerare la scissione provocata da particelle veloci.

Analogamente, l'articolo di SQUIRES sull'interazione neutrone-protone tende a dare un inquadramento generale sull'argomento, mentre quello di BREIT e GLÜCKSTERN sullo scattering nucleone-nucleone tratta principalmente dei risultati sperimentali ottenuti alle alte energie e delle loro implicazioni teoriche.

Non possiamo naturalmente dilungarci in un esame approfondito dei ventiquattro articoli, molto diversi tra loro in ampiezza e importanza, nè d'altra parte metterebbe conto, dato che molti di essi sono evidentemente tratti direttamente dalle schede bibliografiche di un determinato periodo grossolanamente ordinate, la parte critica essendo quasi assente. Il che peraltro non impedisce ch'essi risultino, anche così, di notevole utilità.

Ci limiteremo pertanto a segnalare gli argomenti trattati che sono, oltre quelli già citati: spettrometri a raggi β , risonanza paramagnetica nucleare, scintillazioni, stati eccitati dei nuclei leggeri, modello a «shell» dei nuclei, ionizzazione di particelle veloci, nella rivista inglese.

E nell'americana: origine e abbondanza degli elementi, produzione di energia nelle stelle, produzione e distribuzione del C^{14} in natura, acceleratori di particelle, effetti fotoelettrici nucleari, correlazioni angolari, mesoni, alterazioni prodotte dalla radiazione nei solidi, isotopi, momenti nucleari, teoria dei raggi β (due articoli), origine dei raggi cosmici.

Si può aggiungere che in generale gli articoli della rivista inglese hanno carattere più generale e più vicino a quello di un capitolo di trattato, mentre gli articoli della rivista americana sono in genere riassunti degli ultimi risultati ottenuti nei vari campi, col preciso intento pratico di aiutare il ricercatore nel mantenersi al corrente.

Entrambi i volumi sono indubbiamente preziosi strumenti di lavoro e ottime fonti di informazione. Ci sia però lecito di augurarci che le riviste di questo tipo, per quanto utilissime, non si moltiplichino fino ad averne una (o più) per nazione, ma che quelle esistenti e ormai accreditate si potenzino, aumentando il numero degli argomenti trattati e, se mai, abbreviando il ciclo della loro periodicità.

M. AGENO

CENTRO OTTICO ITALIANO, FIRENZE -
Recenti progressi negli obbiettivi fotografici - Normalizzazione nel campo dell'Ottica, a cura del Prof. Ing. MARIO DI JORIO. Firenze, 1952, pagg. 230.

È uno dei fascicoli del Centro Ottico Italiano sopra il convegno scientifico di Ottica tenuto a Firenze nell'Ottobre del 1952 in occasione della Mostra di Cartografia ed Ottica. Il volume raccoglie 25 comunicazioni presentate a questo Congresso da studiosi italiani e stranieri sui due temi indicati nel titolo del volume.

Per il primo argomento notevole il contributo del prof. M. DI JORIO allo studio dell'isoplanatismo mentre particolare interesse per l'Ottica applicata presentano i numerosi articoli sui metodi di calcolo, intesi, per la maggior parte, a fornire ai calcolatori formule analitiche e procedimenti numerici che rendano più agevole e rapida la progettazione.

Seguono sette note su questioni di normalizzazione.

Il fascicolo è evidentemente molto specializzato.

C. M. GARELLI

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA